論文審査の結果の要旨

氏 名　　　　石 川 昌 治

複素超曲面特異点の補空間のトポロジーは、ミルナーによりそのファイバー束構造が明らかにされて以後、大きく発展した。特に複素平面曲線の特異点に対しては、実平面上にはめ込まれた曲線を対応させて、特異点の補空間のトポロジーが理解されることが知られていた。

この研究に大きな役割を果たしたアカンポ氏は、逆に実平面の円板上に一般の位置にプロパーにはめ込まれた曲線が、3次元球面に自然に定義するリンクとその補空間の研究を行ない、複素平面曲線の特異点の理論の多くの部分が一般化され、補空間がファイバー束構造をもつだけでなく、ノットやリンクの理論に多くの応用があることを見出した。このような曲線をデバイドと呼ぶ。

デバイドからのリンクとその補空間のファイバー束を構成は次のようになされた。単位円板 $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ とし、単位円盤内にはめ込まれた曲線 P（デバイド）に対し、$ST(\mathbb{R}^2) = \{(x, u) \in T(\mathbb{R}^2) \mid |x|^2 + |u|^2 = 1\}$ 内のリンクは $L(P) = \{(x, u) \in ST(\mathbb{R}^2) \mid x \in P,\ u \in T_x(P)\}$ と定義される。円板上のモース関数で、P を0レベル集合とし、P に囲まれた領域にはただ1つの最大値あるいは最小値しか持たない $f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を適当に選び、写像 $\theta_{P,\eta} : T(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ を $\theta_{P,\eta}(x) = f_P(x) + i\eta df_P(x)(u) - \frac{1}{2}\eta^2\chi(x)H_{f_P}(x)(u, u)$ (η は十分小さい正の実数、$\chi(x)$ は f_P のモース特異点の小近傍に台を持ち、さらに小さい近傍で1となる関数、H_{f_P} はヘッシアン) で定義する。アカンポ氏は、連結なデバイドに対し、偏角写像 $\theta_{P,\eta}/|\theta_{P,\eta}| : ST(\mathbb{R}^2) \setminus L(P) \to S^1$ が局所自明なファイバー束であり、そのモノドロミーは正のデーンツイストの積で表されることを示した。

一方、結び目理論において、ハーラー氏はファイバー絡み目のファイバー曲面は、円板に正または負のホップバンドのプランビング、その逆操作、及びツイスティング操作の3操作を繰り返し行うことで構成できることを示し、さらにジルー氏はホップバンドのプランビング、その逆操作の2操作ですべてのファイバー絡み目の曲面が得られることを証明した。

論文提出者 石川昌治はデバイドのファイバー曲面に関する自然な問題として、ファイバー曲面がどのようなプランビングにより得られるかという問題に取り組み、デバイドの曲線を分解することにより、次の結果を得た。

定理。 デバイドのファイバー曲面は円板に正のホップバンドのプランビングだけを行なって得られる。

特に、平面曲線孤立特異点のミルナー束のファイバー曲面は円板に正のホップバンドのプランビングだけを行なって得られたものであることがわかる。これは先行する平澤氏の、デバイドのファイバー曲面が正のホップバンドのプランビングとその逆操作を繰り返すことで得られるという結果を精密化したものである。

さらに論文提出者は論文の後半で、デバイドとそのファイバー束の構成を種数 $g \geq 0$、境界成分の数 $n \geq 0$ であるような向き付けられたコンパクトな曲面 $\Sigma_{g,n}$ 上に描かれたデバイドへと拡張した。リンクとその補空間のファイバー束は、$\Sigma_{g,n}$ の接円束から境界の各点上のファイバーを 1 点に同一視することにより得られる多様体 $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ に構成される。論文提出者は上記の $\theta_{P,\eta}(x)$ と同様の関数をレフシェッツの意味のファイバー束とみて、それを分解することにより次を示した。

定理。 P を曲面を十分に分割するデバイドのとき、多様体 $\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ は P のリンクをバインディングとするモノドロミー写像が正のデーンツイストの積で表されるオープンブック分解を持つ。

このことから、$\partial N_\varepsilon(\Sigma_{g,n})$ 内の任意のリンクに対し、それを含むリンクをバインディングとする上のようなオープンブック分解が存在することもわかる。

上記の結果は、デバイドの理論の 3 次元多様体のトポロジーの研究への優れた応用であり、今後のこの分野の研究に重要な意味を持つものである。よって論文提出者 石川昌治は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。