論文の内容の要旨

Study of Supersymmetry in Quantum Dynamics of Eleven-dimensional Supergraviton

(11 次元超重力子の量子ダイナミックスにおける超対称性の研究)

村松 哲行

1 序論

M-theory の明確な作用に基づく定式化は，現在までのところ，Banks 達 [1] によって提唱された Matrix theory のみである．提案以来，11 次元における超重力子である D-particle の散乱を始めとして，様々な検証が行われて数々の成功を収めてきたが，なぜ Matrix theory が M-theory あるいはその低エネルギー極限である 11 次元超重力理論の記述に成功しているのかという基本的な疑問には明確に答えられないままである．

Matrix theory の持つ高い超対称性 (SUSY) は，これに答える重要な示唆を与えると考えられているが，D-particle 散乱における超対称性を論じた研究 [2, 3] は eikonal 近似 (D-particle の軌跡を直線軌道にする) を用いているために不完全であり，超対称性の役割が完全に理解されたとは言い難い．完全な解析のためには，eikonal 近似を用いずに，off-shell，つまり D-particle の軌跡を任意の時間依存としなくてはならない．この点に注意しながら，この博士論文では source-probe 系 における D-particle 散乱に関して，

- 有効作用の計算を進め，超重力理論と比較して Matrix theory を検証する
- Matrix theory の SUSY Ward 恒等式を導出し，超対称性による制限を明らかにする
- Martix theory の作用を用いることなく，超対称性の要求のみから有効作用をどの程度決定できるかを，超対称性の off-shell の構造に注目して解析する

ことを行った．なお，この博士論文は風間洋一教授との共同研究に基づいている [4, 5, 6, 7, 8].

2 D-particle 散乱と有効作用

Matrix theory は次の作用で定義されている (ここでは計算の便宜のため Euclid 化した) :

$$\widetilde{S}_0 = \mathrm{Tr}\int d\tau\left\{\frac{1}{2}[D_\tau, X_m]^2 - \frac{g^2}{4}[X_m, X_n]^2 + \frac{1}{2}\Theta[D_\tau, \Theta] - \frac{1}{2}g\Theta\gamma^m[X_m, \Theta]\right\}.$$

ここで，D_τ は共変微分 $D_\tau \equiv \partial_\tau - ig\widetilde{A}$ であり，$X^m_{ij}(m = 1, \cdots, 9)$, $\Theta^\alpha_{ij}(\alpha = 1, \cdots 16)$ は $(N+1)\times(N+1)$ の Hermite 行列で，それぞれの対角成分は D-particle の transverse 方向の位置と spin を表す．

Source-probe 系とは，原点に source の D-particle が N 個あり，probe の D-particle がそれらと相互作用しながら運動する系である．この系に対応する background を入れて，

$$X_m(\tau) = \frac{1}{g}B_m(\tau) + Y_m(\tau), \qquad \Theta_\alpha(\tau) = \frac{1}{g}\theta_\alpha(\tau) + \Psi_\alpha(\tau),$$

$$B_m(\tau) = \mathrm{diag}\,(r_m(\tau), \overbrace{0,0,\ldots,0}^{N}), \qquad \theta_\alpha(\tau) = \mathrm{diag}\,(\theta_\alpha(\tau), \overbrace{0,0,\ldots,0}^{N}),$$

gauge 固定をして，この background のまわりの揺らぎを積分すると probe の有効作用 $\Gamma[r^m, \theta^\alpha]$ が得られる．有効作用は loop と order の二重展開になっており，order 展開とは微分 ∂ に 1，spin θ^α に 1/2 を割り当て，それの偶数次での展開である:

		order 2	order 4	order 6	order 8	$\cdots$
tree	g^{-2}	$[\partial^2] + [\partial\theta^2]$	0	0	$0\cdots$	
1-loop	g^0	$[\partial^2] + [\partial\theta^2] + [\theta^4]$	$[\partial^4] \sim [\theta^8]$	$[\partial^6] \sim [\theta^{12}]$	$[\partial^8] \sim [\theta^{16}]$	$\cdots$
2-loop	g^2	〃	〃	〃	〃	$\cdots$
⋮						

まず手始めに，1-loop order 4 では off-shell 有効作用が一部しか知られていなかったため，それを spin の自由度まで含めて完全に求めた [5]．1-loop の有効作用なので一見簡単にみえるが，off-shell であるために propagator の “質量項” が関数となることと，SO(9) γ-行列がふんだんに登場することなどにより，これらの計算は大変煩雑なものになる．SO(9) Fierz 恒等式の生成など様々なアルゴリズムを開発してこの計算を完遂した．結果の一部を以下に示す ($v^m \equiv \partial_\tau r^m$, $\dot{\theta}^\alpha \equiv \partial_\tau\theta^\alpha$, etc)：

$$\Gamma_1^{\partial^3\theta^2} = \int d\tau \left(\frac{25\,v^2\,(\dot{\theta}\theta)}{16\,r^7} - \frac{35\,(r\cdot v)^2\,(\dot{\theta}\theta)}{8\,r^9} + \frac{5\,(r\cdot a)\,(\dot{\theta}\theta)}{4\,r^7} + \frac{(\ddot{\theta}\dot{\theta})}{4\,r^5} - \frac{105\,v^2\,r_i\,v_j\,(\theta\gamma^{ij}\theta)}{32\,r^9} + \frac{5\,v_i\,a_j\,(\theta\gamma^{ij}\theta)}{16\,r^7} \right). \tag{1}$$

これは超重力理論から計算された結果 [9]

$$S^{\theta^2}_{\mathrm{SUGRA}} = \int d\tau \left(\frac{15\,v^2\,(\dot{\theta}\theta)}{16\,r^7} - \frac{105\,v^2\,r_i\,v_j\,(\theta\gamma^{ij}\theta)}{32\,r^9} \right),$$

と naive には一致しない．適当な field redefinition により一致させることは可能だが，loop 展開の高次の有効作用の形も変えてしまうため，loop 展開の高次の比較に非自明に寄与する．この差違は off-shell で計算したことによってはじめて得られた知見であり，この博士論文の重要な成果の一つである．

$O(\theta^4)$ 以上の項は，超重力理論から計算されていないため比較ができないが，Matrix theory と 超重力理論の対応を認めれば，これは Matrix theory による超重力理論への予言であると解釈できる．

3 Matrix theoey における SUSY Ward 恒等式

続いて，これらの有効作用が超対称性からどの程度制限されるかを調べるために，SUSY Ward 恒等式を導出して，それに基づく解析を行った．

3.1 SUSY Ward 恒等式の導出

先に指摘したように，対称性に基づいて議論をする際には，off-shell で議論しなくてはならない．しかしながら，maximal な超対称性を持つ理論では off-shell の unconstrained superfield 形式が知られていないため，component 形式で計算しなくてはならない．Component 形式では超対称性と gauge 対称性が複雑に絡み合っており，SUSY Ward 恒等式の導出自体が非自明であったが，BRST Ward 恒等式を用いることにより，量子補正を受けた超対称変換 $\delta_\epsilon B_{m,i}(\tau)$, $\delta_\epsilon\theta_{\alpha,i}(\tau)$ を読み取れる形で SUSY Ward 恒等式を得ることに成功した [4]:

$$\int d\tau \left(\delta_\epsilon B_{m,i}(\tau)\frac{\delta\Gamma}{\delta B_{n,j}(\tau)} + \delta_\epsilon\theta_{\alpha,i}(\tau)\frac{\delta\Gamma}{\delta\theta_{\alpha,i}(\tau)} \right), = 0\,.$$

ここでは，$\delta_\epsilon B_{m,i}(\tau)$ と $\delta_\epsilon \theta_{\alpha,i}(\tau)$ を明示しないが，相関関数を用いて定義されている．

3.2 Ward 恒等式による有効作用への制限

1-loop order 2

この SUSY Ward 恒等式を最も簡単な場合である 1-loop order 2 の場合に適用した．有効作用の一般形を CPT 対称性や SO(9) 対称性を考慮して書き，SUSY Ward 恒等式を方程式のようにして解くことによって，有効作用が完全に決まることが分かった [4].

1-loop order 4

1-loop order 4 においても同様の解析を試みた．微分と spin が増えるため，有効作用の一般形の項数が飛躍的に増大する．特に，$O(\theta^4)$ 以上では Fierz 恒等式によって関係する項があるので有効作用の独立な自由度を取り出すことが難しい．全ての Fierz 恒等式を生成するアルゴリズムなどを作ってこれらの問題を解決し，煩雑な計算を実行した末に有効作用が完全に決まるという結果を得た [6].

一般的定理

Order 4 での非自明な結果に促されてさらに高次に研究を進めたところ，この一意性は loop 展開と order 展開の全ての次数で成立しているという次の定理の証明に成功した [7].

定理 δ を量子効果を含めた超対称変換の operator として， 結合定数 g について $\delta = \sum_{n\geq 0} g^{2n}\delta^{(n)}$ のように展開可能であるとする．ここで $\delta^{(0)}$ は tree-level の超対称変換の operator．このとき，SUSY Ward 恒等式 $\delta\Gamma = 0$ から有効作用 Γ は摂動論の任意の次数において overall constant を除いて一意に定まる．ただし，Γ は SO(9) 対称性を保つと仮定した．

次の命題から定理の証明は容易である:

命題 汎関数微分方程式 $\delta^{(0)}X = 0$ の解 X は overall constant を除いて一意であり， tree-level の有効作用のみである．ただし，X は SO(9) 対称性を保つと仮定した．

命題の証明: $\delta^{(0)}X = 0$ は Grassmann 変数を含む複雑な汎関数偏微分方程式である．これを直接取り扱うのは難しいので，“積分可能条件” $(\delta_\epsilon^{(0)}\delta_\lambda^{(0)} - \delta_\lambda^{(0)}\delta_\epsilon^{(0)})X = 0$ を書き換えてより取り扱いやすい式を得ることで解析を行った．これは一見ただの必要条件に過ぎないが，off-shell であるために交換関係に運動方程式に比例した項が存在して非自明な条件となる．

X の中で最も高階微分の spin を含む項に注目して，それらがこの条件を満たすかどうかを調べて可能な解を制限することで，X が tree-level の有効作用でなくてはならないことを示して，命題の証明が完結する．

定理の証明: Ward 恒等式を満たす有効作用が二つ存在したと仮定すると，それらの差 $\Delta\Gamma$ は $\delta\Delta\Gamma = 0$ を満たす．この式を結合定数について展開して命題を用いると容易に $\Delta\Gamma = 0$ が得られ，解は一意となる．

4 Kinematical argument

この一意性の定理は，次の点で不十分であった：

(i) 具体的に δ を決める処方を与えていない．Ward 恒等式から求めるとすると，相関関数を必要とするため，完全に kinematical な議論とは言えない．

(ii) 非摂動的な証明ではない．

そこで，続く解析ではこれらの点を次のように改めた：

(i) δ が超対称変換であるという性質に基づいて，δ を次の closure relation で定義した：

$$[\delta_\epsilon, \delta_\lambda]\,\theta_\alpha = 2(\epsilon\lambda)\dot{\theta}_\alpha + A_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\delta\Gamma}{\delta\theta_\delta}\epsilon_\beta\lambda_\gamma + B_{\alpha\beta\gamma n}\frac{\delta\Gamma}{\delta r_n}\epsilon_\beta\lambda_\gamma,$$

$$[\delta_\epsilon, \delta_\lambda]\,r_m = 2(\epsilon\lambda)\dot{r}_m + C_{m\beta\gamma\delta}\frac{\delta\Gamma}{\delta\theta_\delta}\epsilon_\beta\lambda_\gamma + D_{m\beta\gamma n}\frac{\delta\Gamma}{\delta r_n}\epsilon_\beta\lambda_\gamma,$$

ここで，A, B, C, D は未知の係数関数．

(ii) Order については展開するが，loop については展開しない．

Closure relation と Ward 恒等式 $\delta\Gamma = 0$ を連立して解いて，δ と Γ が決まるかを次の手順で調べた:

1. Γ, δ などを order に関して必要な次数まで展開して，各 order における 最も一般的な structure を，$\delta_\epsilon r^m$, $\delta_\epsilon \theta_\alpha$, Γ に対して具体的に書き下す．
2. 超対称変換，あるいは有効作用から field redefinition で消すことができる項を除く．
3. 超対称変換と有効作用を closure relation と Ward 恒等式に代入して解く．

実際の計算は Fierz 恒等式をふんだんに使う大変なものとなるが，order 4 の解析では項の効果的な分類を行うことで，計算を大幅に簡略化した．得られた結果は次の通り [8]:

- Order 2 の有効作用は適当な field redefinition の下で，非摂動的にも tree-level exact.
- Order 4 の有効作用は適当な field redefinition の下で，非摂動的にも 1-loop exact:
$$\Gamma^{\partial^4} = \int d\tau \left(b + \frac{c}{r^7}\right) v^4 , \quad \Gamma^{\partial^3\theta^2} = \int d\tau \frac{7c}{2} \frac{v^2 r_j v_i (\theta\gamma^{ij}\theta)}{r^9} , \quad \Gamma^{\partial^2\theta^4} = \cdots ,$$
ここで，b, c は定数．なお，$b = 0, c = -15/16$ と選べば，適当な field redefinition で，これらと (1) は一致する．Order 2 の結果と合わせて，Matrix theory の意味で解釈すれば (Matrix theory の作用は一切使っていないけれども)，これらは非くりこみ定理の完全な証明である．
- 超対称変換および $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ などを，この次数まで決定した:
$$\delta_\epsilon^{\partial^2\theta} r^m = 2i\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v_i v_m (\epsilon\gamma^i\theta) + i\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v^2 (\epsilon\gamma^m\theta) , \quad \delta_\epsilon^{\partial^3} \theta^\alpha = 3i\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v^2 v_i (\epsilon\gamma^i)_\alpha ,$$
$$\begin{aligned} A^{\partial^2}_{\alpha\beta\gamma\delta} = & 2\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v^2 \gamma^i{}_{\beta\delta}\gamma^i{}_{\gamma\alpha} - 2\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v^2 \gamma^i{}_{\beta\alpha}\gamma^i{}_{\gamma\delta} \\ & + 4\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v_i v_j \gamma^i{}_{\beta\delta}\gamma^j{}_{\gamma\alpha} - 4\left(b + \frac{c}{r^7}\right) v_i v_j \gamma^i{}_{\beta\alpha}\gamma^j{}_{\gamma\delta} , \ \text{etc} . \end{aligned}$$
これらはこれまでの解析 [2, 3] では決して得られない，今回の解析によって新しく得られた結果である．

5 まとめと今後の課題

一意性および非くりこみ定理により，source-probe 系という限られた配位に関してではあるが，超対称性は D-particle 散乱のダイナミックスを統制できるほど強力であることを示したことになる．非くりこみ定理がどの次数まで成立するか確かめるのは今後の課題の一つである．

また，重力理論の特徴の一つである非線形相互作用は多体系ではじめて非自明な寄与をする．そのため，一意性および非くりこみ定理の多体系への拡張は，重力理論のダイナミックスと超対称性の関係の理解につながる重要な試みであり，今後の研究で明らかにしたい．

References

[1] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. **D55** (1997) 5112; L. Susskind, hep-th/9704080.
[2] S. Paban, S. Sethi and M. Stern, Nucl. Phys. **B534** (1998) 137.
[3] S. Hyun, Y. Kiem and H. Shin, Nucl. Phys. **B558** (1999) 349.
[4] Y. Kazama and T. Muramatsu, Nucl. Phys. **B584** (2000) 171.
[5] Y. Kazama and T. Muramatsu, Class. Quant. Grav. **18**, 2277 (2001).
[6] Y. Kazama and T. Muramatsu, Class. Quant. Grav. **18**, 5545 (2001).
[7] Y. Kazama and T. Muramatsu, Nucl. Phys. **B613** (2001) 17.
[8] Y. Kazama and T. Muramatsu, arXiv:hep-th/0210133.
[9] S. Hyun, Y. Kiem and H. Shin, Phys. Rev. **D60** (1999) 084024-1.