論文の内容の要旨

論文題目　：Twisted boundary states in c=1 coset conformal field theories

「c=1の商空間共形場理論における ツイストされた境界状態」

氏名　：山口貴史

D-braneの発見は、弦理論の非摂動的な性質の理解を著しく促進させたが、一般の背景中におけるD-braneの全貌は今だ不明であり更なる研究が求められている。そのような背景中の弦理論は世界面上の共形場理論(CFT)により記述され、特にD-braneが存在する場合、世界面はD-brane上に束縛された境界を持つことが可能になる。境界を含んだ世界面上のCFTはBCFTと呼ばれ、D-braneの研究のための強力な道具を与えている。

BCFTでは相関関数を得る目的で導入された、境界状態と呼ばれる一般化されたコヒーレント状態が有用になる。任意の境界αに一つの境界状態$|\alpha\rangle$が対応するため、境界状態は一般化されたD-braneと見なせる。全ての境界状態は共形不変性の制限

$$(L_n - \tilde{L}_{-n})|\alpha\rangle = 0 \qquad (1)$$

を満たさねばならないが、いわゆるDirichlet, Neumann型の境界状態はより厳しい制限

$$(a^{\mu} \pm \tilde{a}^{\mu})|a\rangle = 0 \qquad (2)$$

を満たしているため極めて特殊な例であることがわかる。全ての共形不変な境界状態を調べ上げることは、弦理論の非摂動的な側面を見るために非常に重要であるにも関わらず、現在のところ、我々は特殊な例しか知ることができない。その理由は、CFTのHilbert空間が一般に無限個のVirasoro代数の既約表現を含んでいるからに他ならない。

そのような無限個の既約表現が出現する場合は、Virasoro 代数の中心電荷が

$$c \geq 1 \tag{3}$$

の条件を満たす時であるのだが、厳密に $c=1$ の場合はその構造が完全に調べられている。$c=1$ の Virasoro 代数の既約表現は 2 種類あり、その共形ウェイト h の値により分類される。

$$h \neq \sqrt{2}j, \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{4}$$

の場合は表現空間にヌル状態が存在せず、

$$h = \sqrt{2}j, \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{5}$$

の場合は表現空間のレベル $2j+1$ にヌル状態が存在する縮退表現となる。

これらの事実をもとに、一般の境界状態を探す試みが、S^1 上の自由ボソンの理論においてなされ [1] 、S^1 の半径が

$$R = \sqrt{2}\frac{p}{q}, \quad (\text{ただし } p \text{ と } q \text{ は互いに素}), \tag{6}$$

の場合に、標準の Dirichlet,Neumann 境界状態のほかに縮退表現のみから構成された境界状態が得られ、これらは共形境界状態とよばれている。特にレベル 1 の $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten 模型 (WZW) を記述している $R=\sqrt{2}$ の場合には、理論の全ての状態が縮退表現に属し、この共形境界状態はいわゆる $\widehat{su}(2)_1$ の Cardy 境界状態を、$su(2)$ の内部自己同型でツイストして構成したものと同じであることが示されている。それらは群 $SU(2)$ の要素をパラメーターとして持つものであり、ここでは $|g\rangle$ $(g \in SU(2))$ と表すことにする。

以上の結果を導出するに際し用いた事実は非自明な同等性

$$\text{レベル } 1 \text{ の } SU(2)\text{WZW} \sim \text{半径 } R=\sqrt{2} \text{の } S^1 \text{理論} \tag{7}$$

であった。この経験が教えることは CFT 同士が非自明な同等性を有するならば、それはより一般的な境界状態を導く可能性を秘めているということである。この観点で、我々が着目したのは次のような同等性である:

$$\text{商空間共形場理論}\frac{\widehat{so}(2k)_1 \oplus \widehat{so}(2k)}{\widehat{so}(2k)_2} \sim \text{半径 } R=\sqrt{2k}\text{のオービフォールド } S^1/\mathbb{Z}_2 \tag{8}$$

この関係により商空間共形場理論の側で構成した境界状態をオービフォールドの側で再解釈することが可能になる。商空間共形場理論 G/H は重要な CFT の種類で様々な応用性を持つため、既に境界状態の構成についてはいくらかの例が与えられている。この論文で用いるものは G および H に付随した有限 Lie 代数の外部自己同型で同時にツイストした境界状態である。$so(2k)$ の外部自己同型は一般には $\mathbb{Z}_2$ に同型で、$k=4$ の時はそれに加えさらにトライアリティーと呼ばれる $\mathbb{Z}_3$ に同型なのものが存在する。

仮に商空間共形場理論のカイラルカレントのモードを $J_n, \bar{J}_n$ により表すとすると、外部自己同型 ω によりツイストされた境界状態 $|\alpha\rangle^{\omega}$ とは境界条件

$$(J_n - (-1)^h \omega(\bar{J}_{-n}))|\alpha\rangle^{\omega} = 0 \tag{9}$$

を満たすものをいう。ここで h はカレントの共形ウェイトである。式 (9) の一般解は Ishibashi 状態とよばれる基底により張られる。それを $|i\rangle\rangle^{\omega}$ で表すとすると、ツイストされた境界状態は Ishibashi 状態の線形結合となる:

$$|\alpha\rangle^{\omega} = \sum_j \frac{\psi_{\alpha}{}^{j}}{\sqrt{S_{0j}}}|j\rangle\rangle^{\omega}, \tag{10}$$

ここで、S は商空間共形場理論の指標の S 行列であり、ψ は文献 [2] で与えられたツイステッド・アファイン Lie 代数の S 行列と密接に関係したユニタリーな行列である。この論文で用いる重要な事実はツイストされている Ishibashi 状態とされていない Ishibashi 状態の間の関係

$$^{\mathrm{id}}\langle\langle i|q^{L_0+\bar{L}_0-1/24}|j\rangle\rangle^{\omega} = \delta_{i,j}\chi_i^{\omega}(\tau), \tag{11}$$

である。ここで、$\chi_i^{\omega}(\tau)$ がツイステッド・アファイン Lie 代数の指標の分岐関数として現れるところが多少自明でないところである。

一般論に基づいて、実際に $\mathbb{Z}_2$ 外部自己同型でツイストした境界状態を構成すると、それはオービフォールド側では既知の境界状態 (つまり Dirichlet または Neumann) が対応していることを示すことができる。一方、$\mathbb{Z}_3$ 外部自己同型でツイストした境界状態は既知のものとは対応せず、次のような形になる:

$$\frac{1}{2}(|g_3\rangle + |g_3 i\sigma^1\rangle + |g_3 i\sigma^2\rangle + |g_3 i\sigma^3\rangle) \ ,$$
$$\frac{1}{2}(|-g_3\rangle + |-g_3 i\sigma^1\rangle + |-g_3 i\sigma^2\rangle + |-g_3 i\sigma^3\rangle) \ ,$$

ここで $\sigma^i (i=1,2,3)$ は Pauli 行列であり、$g_3 = 1 - i\sigma^1 - i\sigma^2 - i\sigma^3 \in SU(2)$ である。これらは Neumann 型でも Dirichlet 型でもなく、さらに縮退表現のみから構成されているためオービフォールドにおける共形境界状態として解釈可能である。

ここで $\Gamma = \{1, i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3\}$ とおいて、最後の結果を次のように書き表すことは示唆的である:

$$\frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\gamma g \gamma^{-1}\rangle. \tag{12}$$

なぜなら、半径 $\sqrt{8}$ のオービフォールド $S^1/\mathbb{Z}_2$ は非アーベリアン・オービフォールド $SU(2)/\Gamma$ の Γ が位数 4 の 2 面体群 $\mathbf{D_2}$ の場合と同等であるからである。さらに Γ は随伴作用のもとで $\mathbf{D_2}$ と同型である。この例から類推し、我々は表式 (12) をもって一般の $c=1$ オービフォールド $SU(2)/\Gamma$ における共形境界状態を提案する。

厳密にはこの表式が許されるのは g がオービフォールド群の固定点でない場合である。仮に固定点があるにも関わらずこの表式をそのまま用いれば、境界状態の既約性が失われてしまう。これは一般のオービフォールで起こり得る現象であり、通常、固定点において、フラクショナル境界状態と呼ばれるものを導入し、既約性を回復する必要がある。我々は Γ が位数 n の巡回群 $\mathbf{C_n}$ と位数 $2n$ の 2 面体群 $\mathbf{D_n}$ の場合にこれを実際に実行した。

最後に今後の課題を述べる。最も直接的なものは $\widehat{su}(2)_1$ をを $\widehat{su}(n)_1$ $(n > 2)$ に拡張することである。このとき同時に Virasoro 代数は $\mathcal{W}_n$ 代数に置き換わる。なぜなら、$\mathcal{W}_n$ は $\widehat{su}(n)_1$ のカシミア代数であるからである。$\widehat{su}(n)_1$ は $n-1$ 次元トーラスにより実現できるが、我々の構成により、そのオービフォールドで一般の $\mathcal{W}_n$ 対称性を保つ境界状態が得られることが期待される。

参考文献

[1] M. R. Gaberdiel and A. Recknagel, JHEP **0111**, 016 (2001) [arXiv:hep-th/0108238].

[2] H. Ishikawa, Nucl. Phys. B **629**, 209 (2002) [arXiv:hep-th/0111230].