論文内容の要旨

論文題目　Computational Algebraic Analyses
for Unimodular or Lawrence-Type Integer Programs
(単模および Lawrence 型整数計画問題に対する計算代数的解析)

氏名　石関 隆幸

整数計画問題に対して，トーリックイデアルの離散性を用いて Gröbner 基底や standard pair を適用する研究が近年なされている．これらのアプローチは既存の整数計画問題に対する解法に比べて計算量を改善するようなものではないが，トーリックイデアルの組合せ論的な構造に関する結果が多くあるため，整数計画問題の構造に対する代数的な解析が与えられると期待される．

多項式環上のイデアルにおいて，Gröbner 基底と standard pair の集合は，Gröbner 基底の initial term で生成される initial ideal に属する単項式の集合の補集合の，ある性質の良い分解が standard pair 分解である，という意味で，双対の関係にあると言える．このような双対性が組合せ最適化における新たな双対性を与え，さらに双対定理の成り立つ整数計画問題のクラスを考え，このクラスの特徴を用いることにより，一般的な整数計画問題からは得られないような計算量の上下限を得ることができると期待される．本論文では，特に係数行列が単模のとき，および Lawrence 型であるときに着目する．

係数行列 A が単模であるような問題は，不等式系 $yA \leq c$ が完全双対整数性 (TDI) を満たし，さらに各 standard pair が双対実行可能基底に対応する，という点で性質の良い問題のクラスである．本論文では，係数行列が単模であるような整数計画問題に対して standard pair を用いた方法は，その standard pair に対応する基底での被約コストを計算することと等価であることを示す．よって，standard pair の数 (つまり，双対実行可能基

底の数) がこの方法の計算量を与える．さらに，双対実行可能基底の数の最大値が，行列 A を斉次化して定義される多面体の正規化体積で表せることを示す．

さらに，本論文では特に最小費用流問題に着目する．最小費用流問題は，単模な整数計画問題の中でも多項式時間で解くことのできる問題のクラスをなすことが知られている．この問題に対する Gröbner 基底を用いたアプローチは，既存の負閉路消去アルゴリズム，つまり実行可能流に対して残余ネットワーク内の負閉路を見つけて流し変えていく方法の変形である．一方，standard pair を用いたアプローチでは，まず standard pair の集合を求め，非負整数解が得られるまで，各 pair に対応する線型連立方程式を解く方法である．ここでは，もっとも基本的な有向グラフである無閉路トーナメントグラフ上の最小費用流問題に着目する．このとき，Gröbner 基底はグラフの言葉で特徴づけることができる．これを用いて，主問題に対する双対実行可能基底の数が高々 Catalan 数であるのに対し，双対問題に対する主実行可能基底の数が少なくとも指数オーダになることを示す．ネットワーク最適化問題において，Gröbner 基底と双対実行可能基底の関係はサーキットと双対実行可能補木 (双対的には，カットセットと主実行可能木) の関係に対応する．これらの関係はほとんど明らかでないので，この結果は計算代数的双対性を用いた解析の面白い結果である．

一方，組合せ最適化において，Lawrence 型の行列は容量付き整数計画問題やある多次元輸送問題など，多くの問題に表れる．また，統計学において，各行和を固定したある型の多次元分割表のサンプリングや数え上げに Lawrence 型の行列が用いられることが知られている．行和の固定された 3 元分割表を数え上げる問題が #P-complete であることが知られている一方で， 近年 $2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times N$ 型の分割表に対して，多項式時間マルコフ連鎖モンテカルロ法が提案された．

Lawrence 型の行列に対する Gröbner 基底と行列のベクトルマトロイドとの関係は良く研究されているが，standard pair については良く分かっていない．そこで本論文では，特に双対実行可能基底に対応する standard pair に着目し，このような standard pair の集合とベクトルマトロイドの基集合の間の全単射を与え，さらにそのような standard pair たちのマトロイド的な構造を示す．特に，行列が単模であるときは，上の関係は双対実行可能基底の数とベクトルマトロイドの基の数が等しいことを表している．さらにその系として，無閉路トーナメントグラフ上での容量付き最小費用流問題に対する双対実行可能基底の数が与えられることを示す．また，$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times M \times N$ 型の多次元輸送問題に対する双対実行可能基底の数についても解析する．一方，多次元輸送問題の双対問題に対しては, $2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 \times N$ 型の輸送問題の双対問題に関して双対実行可能基底の数を解析し，$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times M \times N$ $(M \geq 3)$ 型の多次元輸送問題に対する解析は複雑であることを示す．これは，多元分割表に関する統計的・組合わせ的な問題に対して，$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 \times N$ 型の輸送問題とそうでない型の問題との複雑さの違いを計算代数的に与えている．