論文審査の結果の要旨

氏名 石関 隆幸

本論文は5章より成り、第1章では整数計画問題、特に単模な整数計画問題やLawrence型整数計画問題を、Gröbner基底やtoric idealsのstandard pairなどの計算代数的手法と関係付けるという本論文の基本的な主張の背景について述べる。第2章ではGröbner基底とstandard pair分解という二つの計算代数的手法を導入し整数計画問題との関係を示す。第3章は単模な整数計画問題を取り上げ、standard pairsの数の最大が、polytopeの体積で与えられることを示し、無閉路トーナメントグラフ上の最小費用流問題の主問題と双対問題への計算代数的アプローチを示す。第4章ではLawrence型の整数計画問題を取り上げ、双対実行可能空間のstandard pairsの集合と、ベクトルマトロイドの基集合との間に全単射が成立することを示す。第5章では、主要な結果をまとめ、その意味について考察する。

整数計画問題に対して、近年Gröbner基底やstandard pairを用いた計算代数的手法が研究されている。これらの手法と既存の組合せ的手法の橋渡しを行うことにより、双方の手法の理解が高まり、新たな構造解析手法やアルゴリズムの構築が期待される。多項式環上のイデアルにおいて、Gröbner基底は初項イデアルの生成系であり、standard pairの集合は初項イデアルに含まれない単項式の集合の分解であるため、双対の関係にあると言える。このような双対性に着目し、さらに双対定理の成り立つ整数計画問題のクラスを考え、より豊かな橋渡しができ、一般的な整数計画問題からは得られないような計算量の上下限を得ることができると期待される。本論文では、そのような整数計画問題のクラスとして、係数行列が単模のとき、およびLawrence型であるときに着目した。

係数行列Aが単模であるような問題は、不等式系が完全双対整数性(TDI)を満たし、さらに各standard pairが双対実行可能基底に対応する、という点で性質の良い問題のクラスである。本論文では、係数行列が単模であるような整数計画問題に対してstandard pairを用いた方法が、そのstandard pairに対応する基底での被約コストを計算することと等価であることを示した。よって、standard pairの数(つまり、双対実行可能基底の数)がこの方法の計算量を与える。さらに、双対実行可能基底の数の最大値が、行列Aを斉次化して定義される多面体の正規化体積で表せることを示す。これにより、Gröbner基底から体積計算を通じて双対多面体の頂点数を解析する

という統一的なアプローチを与えることができた。

さらに、本論文では特に輸送問題、および最小費用流問題に着目した。これらの問題に対する Gröbner 基底を用いたアプローチは、既存の負閉路消去アルゴリズム、つまり実行可能流に対して残余ネットワーク内の負閉路を見つけて流し変えていく方法の変形である。一方、 standard pair を用いたアプローチでは、まず standard pair の集合を求め、非負整数解が得られるまで、各 pair に対応する線形連立方程式を解く方法である。輸送問題の主問題および双対問題の実行可能領域の頂点数に関しては、これまでに既存の結果が知られているが、ここでは上のアプローチによる別証を与えた。さらに、無閉路トーナメントグラフ上の最小費用流問題に着目し、最小費用流問題に対する双対実行可能基底の数が高々 Catalan 数となること、および主実行可能基底の数が少なくとも指数オーダになることを示した。ネットワーク最適化問題において、 Gröbner 基底と双対実行可能基底の関係はサーキットと双対実行可能補木 (双対的には、カットセットと主実行可能木) の関係に対応することを示した。これらの関係はほとんど明らかにされていないので、この結果は計算代数的双対性を用いた解析の面白い結果である。

一方、組合せ最適化において、 Lawrence 型の行列は容量付き整数計画問題やある多次元輸送問題など、多くの問題に現れる。また、数理統計学において、各行和を固定したある型の多次元分割表のサンプリングや数え上げに Lawrence 型の行列が用いられることが知られている。行和の固定された 2 元分割表を数え上げる問題が P-complete であることが知られている一方で、 $2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times N$ 型の分割表に対して mixing time が多項式時間となるマルコフ連鎖モンテカルロ法が提案されている。 Lawrence 型の行列に対して、行列の定めるベクトルマトロイドと Gröbner 基底との関係は良く研究されているが、 standard pair については良く分かっていない。そこで本論文では、特に双対実行可能基底に対応する standard pair に着目し、まず双対実行可能基底に対応する standard pair の集合とベクトルマトロイドの基集合の間の全単射を与え、さらにそのような standard pairs のマトロイド的な構造を示した。特に、この関係は双対実行可能基底の数とベクトルマトロイドの基の数が等しいことを表している。さらにその系として、無閉路トーナメントグラフ上での容量付き最小費用流問題に対する双対実行可能基底の数、 $2 \times 2 \times \ldots . \times 2 \times M \times N$ 型の多次元輸送問題に対する双対実行可能基底の数、 $2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times N$ 型の輸送問題の主実行可能基底の数を解析した。

本研究は整数計画問題を計算代数的な新しい視点からその構造を明らかに

したものであり、今後の発展が期待できる。

本研究の一部は、今井浩および中山裕貴との共同研究であるが、論文提出者が主体となって分析及び検証を行ったもので、論文提出者の寄与が十分であると判断する。

したがって、博士（理学）の学位を授与できると認める。