論文の内容の要旨

論文題目 Combinatorial and geometrical properties of simplicial complexes

和訳 単体的複体の組合せと幾何構造

氏名 亀井　聡

トポロジー及び幾何学において，多様体の三角形分割となるような単体的複体の性質を調べることは，重要な研究手法の一つである．また，組合せ論に関連する分野でも，単体的複体はそれ自身，重要な研究対象であるといえる．近年はさらに，情報科学，情報工学の諸分野においても，単体的複体の性質は様々な形で応用されている．特に，コンピュータグラフィックスにおいては，対象物を微小な三角形に分割して表現するという手法がとられることが多く，これは，数学における諸分野での単体的複体についての研究成果の直接的な応用例の一つであるといえる．このような応用的見地からも，今後単体的複体の研究は，重要性を増していくものと思われる．以上のことを踏まえ，本論文では第2章で単体的複体の幾何構造について，第3章で幾何構造について論じた．

まず，用語の定義を行う．単体の有限個の集合 C が，(1) $\sigma \in C$ なら，(空集合も含めた) σ の全ての面は C の元である，(2) $\sigma, \sigma' \in C$ なら $\sigma \cap \sigma'$ は σ と σ' 両方の面となる，という二条件を満たすとき，C は単体的複体であるという．単体的複体 C の0次元面を頂点，1次元面を辺，面の包含関係において極大なものをファセットと呼ぶ．以下では C の辺の集合を $E(C)$，2次元面の集合を $F(C)$ で表すことにする．C に属するファセットの最大次元を，C 自身の次元とする．C の全てのファセットが等しい次元を持つとき，C は純であるということにする．特に，空集合から成る単体的複体を，-1 次元の純な単体的複体とする．C に属する全ての単体の和集合 $|C|$ を，C の底空間と呼ぶ．$|C|$ が多様体 M と同相である時，C は M の三角形分割であるという．本論文では，C が M の三角形分割であるとき，やはり C は M と同相であるということにする．また，単体的複体について，次元が高々 k の面が成す部分複体を，k 骨格ということにする．

定義. S は，底空間がコンパクトかつ連結である，純な2次元単体的複体とする．S の任意のファセット F について，その貼り合わせ面が純な1次元単体的複体から成るとき，S を**分岐曲面**ということにする．

以下，関数 $w : E(C) \to (0, \pi)$ を考え，これを C の辺に関する重み，あるいは単に C の重み

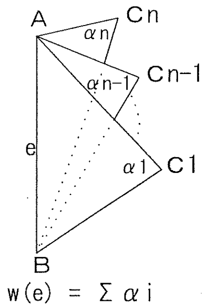

図 1: 辺の重み

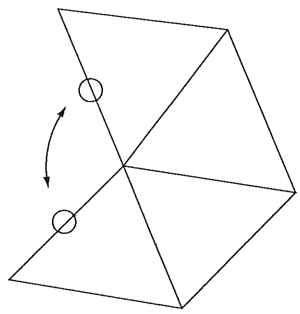

図 2: 局所 Euclid 構造と特異 Euclid 構造

ということにする．今，C には重み w が与えられているとする．e を C の辺とし，A, B を e の頂点とする．また，e を含む C の 2 次元面を $\mathrm{ABC}_1, \mathrm{ABC}_2, \cdots, \mathrm{ABC}_n$ とする．このとき，各頂点 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots \mathrm{C}_n$ に，$w(e)$ から正の値を分配することを考え，これを各頂点における角度と見ることにする（図 1）．

以上の設定に関して，第 2 章では分岐曲面，及び 3 次元多様体と同相な単体的複体の幾何構造を考察した．具体的には，以下のような幾何構造について論じた．

定義. 分岐曲面において，すべての 2 単体が Euclid 三角形として実現されているとき，その実現を局所 **Euclid** 構造と呼ぶことにする（図 2a）．

定義. 分岐曲面，あるいは 3 次元多様体の三角形分割を C とする．また，n を C の次元とする．C の各ファセットが，Euclid 三角形，あるいは Euclid 四面体として実現され，隣接するファセット同士が，対応する $(n-1)$ 次元面で等長的に貼り合わせ可能であるとき，その実現を特異 **Euclid** 構造と呼ぶことにする（図 2b）．

本論文では，重みが与えられた分岐曲面が特異 Euclid 構造を持つ条件について，以下のことを示した．

定理 2.4.1. S を分岐曲面とし，w を S に与えられた重みとする．F' を $F(S)$ の部分集合とし，E' を F' に含まれる全ての辺の集合とする．任意の F' が不等式

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たすとする．ただし，等号成立は $F' = F(S)$ か $F' = \phi$ のときで，そのときに限る．このと

き S は，w から得られる局所 Euclid 構造全体の空間の中で，一意な特異 Euclid 構造を持つ．

さらに3次元多様体と同相で，コンパクトかつ連結な単体的複体の特異 Euclid 構造について，以下のことを示した．

定理 2.4.2. C を，3次元多様体と同相で，コンパクトかつ連結な単体的複体とし，w を C に与えられた重みとする．また，S を C の2骨格とする．F' を $F(S)$ の部分集合とし，E' を F' に含まれる全ての辺の集合とする．任意の F' が不等式

$$\sum_{e \in E'} w(e) \geq \pi |F'|$$

を満たすとする．ただし，等号成立は $F' = F(S)$ か $F' = \phi$ のときで，そのときに限る．このとき C は特異 Euclid 構造を持つ．

第3章では，組合せ的性質を考察した．まず，用語を準備する．純な d 次元単体的複体 C が**強連結**であるとは，任意の二つのファセット $F, F' \in C$ について，ファセットの列 $F = F_1, F_2, \cdots, F_k = F'$ で，$F_i \cap F_{i+1}$ が C の $(d-1)$ 次元面となっているようなものが存在することをいう．強連結であって，かつ，任意の $(d-1)$ 次元面が高々二つのファセットに含まれているような単体的複体を，**擬多様体**という．連結な多様体の三角形分割は，常に擬多様体となる．擬多様体において，一つのファセットにしか含まれない $(d-1)$ 次元面の成す部分複体を**境界**と呼び，∂C で表す．擬多様体 C について，その**境界で cone** を取ったものを，$C \cup (v * \partial C)$ で定義する．ただし，ここで v は C の外に取った点とする．また，以下では，擬多様体 C の底空間が，球体あるいは球面と同相なとき，C は球体あるいは球面である，ということにする．
以上の設定で，単体的複体について以下のような組合せ的性質を考える．

定義. 純な d 次元単体的複体 C が **shellable** であるとは，C のファセットの順序 $F_1, F_2, \cdots, F_t$ で，$(\cup_{i=1}^{j-1} \overline{F_i}) \cap \overline{F_j}$ $(2 \leq j \leq t)$ が，連結かつ純な $(d-1)$ 次元単体的複体となるようなものが存在することをいう．このファセットの順序を **shelling** という．

定義. 純な d 次元単体的複体 C が **constructible** であるということを，以下のように再帰的に定義する．(1) C が単体であるか，(2) consturctible な d 次元部分複体 C_1 と C_2 が存在して，$C = C_1 \cup C_2$ かつ，$C_1 \cap C_2$ が constructible な $(d-1)$ 次元単体的複体となる．

定義からわかるように，単体的複体が shellable であれば constructible になる．また，shellable あるいは constructible な擬多様体は，d 次元球体か球面に限られる．$d = 2$ の場合には，逆に球体，球面は常に constructible かつ shellable となることがいえる．しかし，$d \geq 3$ においては，球体，球面であって nonshellable，nonconstructible な例が，数多く知られている．特に，3次元球体においては，Rudin，Grünbaum，Ziegler によって，nonshellable かつ constructible なものの例が構成されている．ただ，3次元球面においては，同様の性質を持つような例は知られていない．このことを踏まえ，第3章では3次元球面における shellability と constructibility について考察した．具体的には，まず以下のことを示した．

定理 3.2.2. B は constructible な3次元球体とする．ただし，B について，二つの shellable な3次元球体 C と C' が存在して，$C \cap C'$ が shellable な2次元球体となり，かつ，$B = C \cup C'$ が成

り立っているとする．このとき，B の境界で cone を取ったものは shellable である．

Rudin，Grünbaum，Ziegler の球体は，上記の定理の条件を満たしている．従って，これらの境界で cone を取ってできる 3 次元球面は，全て shellable であることがわかる．一方で，これらの 3 次元球体を用いて，上記の定理の条件を満たさないような 3 次元球体を構成することが可能である．そのことを見るため，まず以下のような操作を定義する．

定義. C_1, C_2 は境界のある 3 次元擬多様体とする．δ_i を ∂C_i の 2 次元面とする．このとき，C_1 と C_2 を，δ_1 から δ_2 への同型写像で貼り合わせてできる単体的複体を，C_1 と C_2 の**境界連結和**と呼ぶ．また，境界のある擬多様体 C_1, C_2, C_3 について，C_1 と C_2 の境界連結和により構成される擬多様体と C_3 の境界連結和を，それら三つの境界連結和と定義する．この繰り返しにより，同様に n 個の擬多様体の連結和を定義する．

例えば Ziegler の球体を二つ用意し，それらの境界連結和を取ると，これは明らかに定理 3.2.2 の条件を満たさない 3 次元球体となる．このような 3 次元球体について，以下のようなことを示した．

定理 3.2.3. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ は constructible な 3 次元球体で，以下の条件を満たすとする．
（条件）各 B_i は，二つの 3 次元球体 C_i と C'_i に分割できる．ただし，C_i および C'_i には任意のファセットから始まる shelling があるとし，$C_i \cap C'_i$ は shellable な 2 次元球体であるとする．
この条件を満たす $B_1, B_2, \cdots, B_n$ の境界連結和を考える．ただし，各 C_i (C'_i) が他の 3 次元球体 B_j $(j \neq i)$ のうち，高々一つとしか貼り合わされていないとする．このとき，その境界連結和の境界で cone を取ったものは shellable である．

定理 3.2.3 は，3 次元球体を一列に並べるように境界連結和を取った場合についての考察である．より一般の場合については以下のことが言える．ただし以下において，曲面 S の**内部辺**とは ∂S に含まれない辺のことをいう．

定理 3.3.1. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ は constructible な 3 次元球体で，以下の条件を満たすとする．
（条件）各 B_i は，二つの 3 次元球体 C_i と C'_i に分割できる．ただし，C_i および C'_i には任意のファセットから始まる shelling があるとし，$C_i \cap C'_i$ は shellable な 2 次元球体であるとする．また，$\partial C_i \cap \partial B_i$ 及び $\partial C'_i \cap \partial B_i$ は，$\partial C_i \cap \partial C'_i$ 上の二点を両端とするような内部辺を持たないとする．
この条件を満たす $B_1, B_2, \cdots, B_n$ による任意の境界連結和について，その境界で cone を取ったものは shellable である．