

本論文提出者は、単体的複体の幾何構造と組合せについてのいくつかの性質を考察している。トポロジー及び幾何学分野において、多様体の三角形分割となるような単体的複体の性質を調べることは重要な研究手法の一つである。また、組合せ論に関連する分野においても、単体的複体はそれ自身重要な研究対象である。さらに近年、情報科学、情報工学の諸分野においても、単体的複体の性質は様々な形で応用されている。とくに、コンピュータグラフィックスにおいては、対象物を微小な三角形に分割して表現するという手法がとられることが多い。これは数学的な研究で明らかにされた単体的複体の諸性質を直接的に応用する例の一つであり、こうした応用的見地からも、単体的複体の研究は今後重要性を増していくと考えられる。

本論文第二章では、分岐曲面及びコンパクトかつ連結な3次元多様体の三角形分割に関し、各辺に重みとして $(0, \pi)$ の範囲での値を与え、それを2単体の対頂点に角度として分配するとき得られる幾何構造について論じている。また、この設定において特異 Euclid 構造が一意に存在するための重みの必要十分条件を与えている。Rivin は1994年、底空間が曲面と同相な単体的複体に重みを与えたとき、局所 Euclid 構造が存在するならば、その中に特異 Euclid 構造が一意に存在することを示し、さらに1999年に、底空間が曲面と同相な単体的複体が局所 Euclid 構造を持つための重みの必要十分条件を与えた。すなわち、この条件を満たす重みが与えられたとき、その単体的複体には一意に特異 Euclid 構造が存在することになる。本論文では、Rivin の結果を拡張して、まず分岐曲面が局所 Euclid 構造を持つための重みの必要十分条件を提示し、このとき局所 Euclid 構造の中に特異 Euclid 構造が一意に存在することを示すとともに、分岐曲面を3次元単体的複体の2骨格と見ることにより、コンパクトかつ連結な3次元多様体の三角形分割が特異 Euclid 構造を持つ重みの必要十分条件を得ている。

第三章では、nonshellable かつ constructible な3次元球体が、shellable な二つの3次元球体に分割できその交わりが shellable であるとき、それらの境界で cone をとることによってできる3次元球面が shellable であることを示し、その拡張について考察している。単体的複体の組合せ的構造についての二つの概念、shellability 及び constructibility のうち、前者は単体的複体の各単体に良い順番付けを行えるかどうかを評価する規範であり、後者は shellability を真に緩めた概念である。したがって shellable な単体的複体は常に constructible になる。また一般に、constructible な擬多様体は d 次元球体及び d 次元球面に限られることが知られている。2次元の場合、逆に球体及び球面であれば shellable であることが知られているが、3次元以上では、球体・球面であって、nonshellable, nonconstructible な例が数多く知られている。特に3次元球体については、nonshellable かつ constructible となる例が、Rudin、Grünbaum、Ziegler によって構成されている。しかし、3次元球面で nonshellable

かつ constructible な例は知られていない。本論文では、nonshellable かつ constructible な 3次元球体 C が二つの shellable な球体 C_1, C_2 に分割でき、かつ $C_1 \cap C_2$ が shellable な 2次元球体であるとき、 C の境界で cone を取ったものは shellable であることを示している。なお、Rudin、Grünbaum、Ziegler の球体はこの条件を満たしている。さらに、これらの球体の境界連結和を取ることで得られる球体について、その境界で cone を取ったものの shellability について考察している。

本論文の結果は、分岐曲面及びコンパクトかつ連結な 3次元多様体の三角形分割について、特異 Euclid 構造全体の空間を重みによって径数づけることに成功し、Rivin の結果の高次元化という問題について一定の解答を与えている。また、shellability と constructibility の性質の差がどのくらいであるかという問題の解決に対する一つの手掛かりを与えている。これらの結果は 3次元グラフィックスにおけるメッシュ生成など、工学領域における問題にも直接応用される可能性があり、その見地からも重要であると考えられる。

よって論文提出者亀井聡は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。