論文の内容の要旨

論文題目：　パンルヴェ超越関数およびある一般化の関数論的研究

氏　　名：　佐々木 良勝

100年程前、新しい特殊関数を作ろうという目論見のもとで、Painlevé および Gambier により、極以外に動く特異点を持たない関数が満たす代数的常微分方程式として、現在パンルヴェ方程式として知られる6種の方程式が得られた。その解は、パンルヴェ超越関数と呼ばれている。これは、方程式自体が既知の特殊関数が満たす方程式に帰着される場合を除いて、"還元不能"であること、すなわち、真に新しい超越特殊関数であることが示されている。

新しい特殊関数たるパンルヴェ超越関数に対し、関数論的研究が行われるのは当然の成り行きと考えられるところ、現実の解析は困難であり、これまではむしろパンルヴェ方程式に関する幾何学的研究や、上述の還元不能性といった代数的研究・特殊解、ないし多変数化・一般化が主な流れであった。ところが最近、パンルヴェ超越関数に関し、下村氏などによる、値分布、増大度等の結果が得られ、関数論的研究が漸く進展を見つつある。

本論文では、パンルヴェ超越関数および、パンルヴェ超越関数のある種の一般化に相当する関数について、値分布ないし増大度等の関数論的性質を探ることを目的とする。

第１部はパンルヴェ２型方程式の高階化であるパンルヴェ２型階層に属する常微分方程式の超越有理型解について、その増大度が最低限どの程度であるかを求めた。この評価は系統的に行なう事ができるものであることを表すため、パンルヴェ２型方程式を含めて、パンルヴェ２型階層に属する数本の方程式について、その超越有理型解の評価を一括して行なった。パンルヴェ２型方程式については下村氏によって増大度の下からの評価が既になされており、本稿第１部は基本的に氏の手法を基にしている。パンルヴェ２型階層の方程式は皆パラメータを１つ有しており、これにつき、異なるパラメータ値の解同士を結ぶ関係式がベックルント変換として知られている (Gromak 氏による)。パラメータ値がゼロの場合の当該評価結果は、このベックルント変換により、パラメータが整数値の場合の評価へと敷衍される。結果から、2m 階の高階パンルヴェ２型方程式のパラメータ整数値なる超越有理型解は最低限 (2m+1)/2m 次のべき乗オーダーで増大していくことが推認される。m=1, 2,3,4 の場合について実際にこの事を示したのが、本稿第１部の主結果である。

第２部はパンルヴェ５型超越関数の値分布の探索に充てられる。パンルヴェ５型方程式はパラメータの値によってはパンルヴェ３型方程式ないし古典関数の方程式に還元可能な場合があるが、それらの場合を除外して、真にパンルヴェ５型超越関数を取り扱う。指数関数で独立変数の定義域を複素円筒に改変した modified パンルヴェ５型方程式の解たる超越関数については、複素平面上全域で有理型の関数であることが知られており、これに対しては値分布が指数関数オーダーであることが既知であった (下村氏による)。本稿では独立変数を変換せず、定義域で無限遠点の回りのある角領域内を考え、当該セクター内におけるパンルヴェ５型超越関数の関数値の分布がべき乗オーダーであることを示す。これが本稿第２部の主結果である。このべきは証明の過程で具体的に求めることができる。評価の過程においては、所謂「釈迦の掌」論法が用いられる。道具立てや手法においては modifi ed パンルヴェ５型超越関数の場合やパンルヴェ１・２・４型超越関数に関する下村氏の議論が大いに参考になる。