論文審査の結果の要旨

氏　名　　佐々木　良勝

パンルヴェ方程式は動く分岐点を持たない２階代数型非線型常方程式として決定されたものであり、実際に不動特異点以外の特異性は極のみであることが知られている。例えば、パンルヴェ２型方程式の不動特異点は無限遠点のみであるから、その一般解は複素平面上の有理型関数である。また、５型方程式は原点と無限遠点に特異点を持ち、従って独立変数 x を $x = e^z$ と変換すれば、一般解は z について有理型関数である。パンルヴェ５型方程式を s について書き直したものは変形５型方程式と呼ばれている。

パンルヴェ方程式の一般解をパンルヴェ超越関数という。この超越関数の関数論的な振る舞いを調べることは、パンルヴェ方程式の発見以来続けられていたが、近年に至るまで十分な成果は得られていなかった。一方では、方程式の変換群や古典解と呼ばれる特別解とについての代数的手法による研究、初期値空間に関する幾何学的な研究が活発に行われている。このような研究はパンルヴェ超越関数の関数論的な研究にも側面から大きな力を発揮することになり、ごく最近ではパンルヴェ超越関数の増大度や値分布について興味ある結果が得られつつあるところである。この方面で慶応大学の下村俊教授の貢献は特記に値する。

本論文は、パンルヴェ超越関数とそれの拡張である高階代数型非線型常微分方程式の定める超越解について、関数論的な立場から研究を行い、興味ある結果を得たものである。論文は２つの部分からなる。第１部ではパンルヴェ２型方程式の高階化であるパンルヴェ２型階層に属する常微分方程式の超越有理型解について、その増大度の下からの評価を与えている。第２部はパンルヴェ５型超越関数の値分布に関係する。変形パンルヴェ５型方程式の解は上述の通り複素平面上全域で有理型となるが、その値分布は当然に指数オーダーとなる。パンルヴェ５型超越関数を $y(x)$ と書くと、本論文では、あるセクター内で $y(a) = 1$ となる点 a、1− 点と言う、が多項式のオーダーで分布していることを示した。

第１部で扱っているパンルヴェ２型階層方程式とは具体的に以下のものである。

$$
\begin{aligned}
P_{II}(2)_\alpha: \quad & \lambda^{(2)} = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha, \\
P_{II}(4)_\alpha: \quad & \lambda^{(4)} = 10\lambda''\lambda^2 + 10(\lambda')^2\lambda - 6\lambda^5 - t\lambda - \alpha, \\
P_{II}(6)_\alpha: \quad & \lambda^{(6)} = 14\lambda^{(4)}\lambda^2 + 56\lambda^{(3)}\lambda'\lambda + 42(\lambda'')^2\lambda + 70\lambda''(\lambda')^2 - 70\lambda''\lambda^4 \\
& \qquad -140(\lambda')^2\lambda^3 + 20\lambda^7 + t\lambda + \alpha, \\
P_{II}(8)_\alpha: \quad & \lambda^{(8)} = 18\lambda^{(6)}\lambda^2 + 108\lambda^{(5)}\lambda'\lambda - 6(21\lambda^4 - 35(\lambda')^2 - 38\lambda''\lambda)\lambda^{(4)} \\
& \qquad +138(\lambda^{(3)})^2\lambda - 252\lambda^{(3)}\lambda'(4\lambda^3 - 3\lambda'') \\
& \qquad +182(\lambda'')^3 - 756(\lambda'')^2\lambda^3 + 84\lambda''\lambda^2(5\lambda^4 - 37(\lambda')^2) \\
& \qquad -798(\lambda')^4\lambda + 1260(\lambda')^2\lambda^5 - 70\lambda^9 - t\lambda - \alpha.
\end{aligned}
$$

ここではこれらの方程式を$P_{II}(2m)_\alpha$と書く。$m=2,3,4$である。主要な結果は次の通りである。

定理 1　αは整数とする。方程式$P_{II}(2m)_\alpha$の超越解λに対して、$r\to\infty$のとき

$$\limsup \frac{\log T(r,\lambda)}{\log r} \geq \frac{2m+1}{2m},$$

が成り立つ。

本来のパンルヴェ２型超越関数の増大度については下村氏がすでに与えたものと一致する。一般のmに対しても同様の結果が成立することが予想されるが、そのためにはパンルヴェ２型階層を簡約化して得られる$2m$階常微分方程式の形とベックルント変換が必要である。このような代数的な考察が課題であろう。

第２部ではパンルヴェ５型方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\\ &\quad +\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma y}{x}+\frac{\delta y(y+1)}{y-1},\end{aligned}$$

について、$(\gamma,\delta)\neq(0,0)$かつ$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ のとき、以下の結果を得た。

定理 2　無限遠点を頂点とするセクター$\{x||\arg x|<\varphi<\pi,\quad |x|\geq L\}$において、この範囲にある$1-$点の数は、$O(r^C)$である。ここで$C$は、$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$に依らない正の定数である。

分布のオーダーを与えるCが方程式のパラメータに依らないことが大切な点である。

本論文で取り扱われている問題は解析的な困難のためこれまでは十分な研究がなされていなかったものである。手法は最近下村氏により開発されたものが参考になるが、対象となる方程式が異なれば独自の手法を作り出さなければならないことはもちろんである。また、高階の方程式を扱うためには大いに工夫を必要とする。このような困難を乗り越えて具体的な結果を得たことは評価できる。結果自体も興味深いものであるが、この手法はいろいろな問題に応用されることが期待される。よって，論文提出者　佐々木　良勝　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。