# 論文の内容の要旨

論文題目： Isolated singularities for some types of curvature equations
（ある種の曲率方程式における孤立特異点について）

氏　名： 滝本　和広

次の形で表される曲率方程式

$$H_k[u] = S_k(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = \psi(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

を考える．ただし，$u \in C^2(\Omega)$ に対して $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ は $u$ のグラフの主曲率を表し，$S_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ は $k$ 次基本対称関数を表す．

この方程式は，$k = 1, n$ という特別の場合にはそれぞれ平均曲率方程式，Gauss 曲率方程式となる．即ち，方程式 (1) は，幾何学や物理学で重要なこれらの方程式を包括し，より総合的な立場から定式化された，大変興味深い方程式である．

ここで，(1) は $k = 1$ のときは準線形方程式であるが，$2 \leq k \leq n$ のときは完全非線形方程式であることに注意しておく．曲率方程式の研究に関しては，$k = 1, n$ の場合には古くから盛んにおこなわれているが，一般の $k$ に関しては，強い非線形性のためにその取り扱いは非常に難しい．本格的に研究が行われたのは，Caffarelli-Nirenberg-Spruck (1988) による先駆的な仕事以降のことである．初期においては主に Dirichlet 境界値問題における古典解の存在と一意性に関して盛んに研究が行われ，特に非斉次項 $\psi$ が小さい正値関数である場合を中心として多くの結果がある．また，古典解ばかりでなく，粘性解のクラスにおける (1) の Dirichlet 境界値問題の研究もなされている．粘性解は必ずしも微分可能でない関数に対して解の概念を拡張したものであり，1980 年代前半に Crandall-Lions によって導入された．これによって，大幅に弱い仮定の下で，多くの非線型方程式の解の存在や一意性を論じることが可能となっている．曲率方程式 (1) の粘性解については Trudinger (1990) などによる可解性の研究がある．

さて，本論文の前半では斉次（$\psi \equiv 0$）の曲率方程式

$$H_k[u] = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

の粘性解を考え，その解の原点における特異点の除去可能性について考察する．$k=1$ のとき（極小曲面方程式の場合）には古典解の孤立特異点の除去可能性が Bers (1951), Nitsche (1965), De Giorgi-Stampacchia (1965) によって示されている．これは (2) が準線形になるケースであり，一般に準線形や半線形の方程式に対しては，孤立特異点のまわりの解の性質について数多くの研究がある．一方，$2 \le k \le n$ の場合は (2) は完全非線形な方程式となるため，解析が非常に難しくなる．ただし，(2) が Monge-Ampère 型方程式となる $k=n$（Gauss 曲率 0 の方程式）の場合には後で述べるように除去可能でない孤立特異点をもつ解が存在する．しかし，これは Monge-Ampère 型方程式の特殊性に由来するものであり，$2 \le k \le n-1$ の場合には状況は一変すると予想されていたが，理論的な研究は全く進んでいなかった．

次に，本論文の後半では，

(i) 曲率方程式 (1) に対して，粘性解よりもさらに広い解のクラスである広義解 (generalized solution) と呼ばれる概念の導入，

(ii) 広義解のクラスにおける，(2) の原点における特異点の除去可能性

について論じる．

準線形・半線形方程式における孤立特異点に関する研究においては，「試験関数を掛けて積分する」という手法を用いて定義された弱解・超関数解と呼ばれる解のクラスで考えられてきた．これは線形偏微分方程式における旧来の弱解の概念を自然に拡張したものであり，最大値原理が鍵となっている粘性解の概念とは全く異質のものである．このような伝統的な解の概念を完全非線形方程式に拡張するのは難しく，これまでこうした試みは限られたクラスの方程式に対してしかなされていなかった．我々は完全非線形方程式である (1) に対して，弱解や超関数解のような integral nature をもった解である広義解という概念を導入することに成功した．

以下，本論文において得られた結果について述べる．

● **粘性解のクラスにおける孤立特異点の除去可能性**

この問題に関して，次の結果を得た．

**Theorem 1.** $1 \le k \le n-1$ とし，$u$ を (2) の粘性解とする．もし $u$ が原点まで連続に拡張できるならば，拡張された関数 $\tilde{u} \in C^0(\Omega)$ は $H_k[u] = 0$ in $\Omega$ の粘性解である．従って，$\tilde{u} \in C^{0,1}(\Omega)$ である．

Theorem 1 の前半部の証明には，Labutin (2000) が一様楕円型の完全非線形偏微分方程式における解の孤立特異点の研究に用いた手法を応用した．特に，解の評価を行う際に，粘性解に対する比較原理を用いている．この方法は，まず適当な粘性優関数・劣関数を構成し，原点の近傍における解の挙動について考察する．次に原点において $\tilde{u}$ に上から（下から）接する比較関数を与えたとき，その比較関数に適当な微小摂動を加えたものが (2) の方程式の優解（劣解）となることを示し，摂動を 0 に近づけた極限を考えることで元の比較関数も (2) の方程式の優解（劣解）であることを証明する，というものである．Theorem 1 の後半部は Trudinger (1990) により得られた (1) の粘性解の内部正則性に関

する結果より直ちに従う．

なお，$k=n$ のときは Theorem 1 が成立しない反例が存在する．例えば $u(x)=a(|x|-1)$ $(a>0)$ とすると，原点は除去可能でない孤立特異点となっている．

また，同様の論法によって，非斉次項が一般の連続関数であっても孤立特異点の除去可能性に関する結果が得られる．

**Theorem 1′.** $1\le k\le n-1$, $\psi\in C^0(\Omega)$ とし，$u$ を $H_k[u]=\psi(x)$ in $\Omega\setminus\{0\}$ の粘性解とする．もし $u$ が原点まで連続に拡張できるならば，拡張された関数 $\tilde{u}\in C^0(\Omega)$ は $H_k[u]=\psi(x)$ in $\Omega$ の粘性解である．

### ● 広義解 (generalized solution) の導入

まず，特殊なケースとして，$k=n$ のとき，即ち Monge-Ampère 型方程式となる場合を考える．前項で述べたとおり，関数 $u(x)=a(|x|-1)$, $a>0$ は，領域 $B_1=\{z\in\mathbb{R}^n\,|\,|z|<1\}$ において古典解または粘性解の枠組では意味をもたない．しかし，Monge-Ampère 型方程式に対して Aleksandrov や Bakel'man らが導入した広義解と呼ばれる解のクラスでは，$u$ は方程式の解として意味をもち，

$$H_n[u]=\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^n\omega_n\delta_0 \quad \text{in } B_1 \tag{3}$$

を満たす（ただし，$\omega_n$ は $n$ 次元単位球の体積，$\delta_0$ は原点に台をもつ Dirac の $\delta$ 測度）．また，彼らは Borel 測度を非斉次項とする Monge-Ampère 型方程式の Dirichlet 境界値問題を研究し，解の存在や一意性に関する結果を得ている．

そこで，$1\le k\le n-1$ の場合にも同様に Borel 測度を非斉次項にもつような曲率方程式の解が考えられないか，という問題を考える．この方向の研究としては，Hessian 方程式と呼ばれる別の完全非線形偏微分方程式に対する Colesanti-Salani (1997) の研究がある．この問題を曲率方程式に対して考察した結果，解のクラスを凸関数に限れば，曲率方程式においてもそのようなものが考えられることがわかった．

**Theorem 2.** $1\le k\le n$ とし，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界な凸開集合とする．このとき，凸関数 $u\in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ に対して，有界な Borel 測度 $\sigma_k(u;\cdot)$ が存在して，次の 2 つの性質を満たす．

(i) $u\in C^2(\Omega)$ のとき，任意の $\eta\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対して $\sigma_k(u;\eta)=\displaystyle\int_\eta H_k[u]\,dx$.

(ii) $u_i\to u$ in $\Omega$（広義一様） $\Longrightarrow$ $\sigma_k(u_i;\cdot)\rightharpoonup\sigma_k(u;\cdot)$ （弱収束）．

ただし $\mathcal{B}(\Omega)$ は $\Omega$ の Borel 集合全体である．この定理により，$u$ が凸関数であれば，$H_k[u]$ は必ず Borel 測度になる．よって，凸関数解のクラスにおいては，(1) の非斉次項 $\psi$ を Borel 測度にまで拡張できることがわかる．

そこで，曲率方程式の広義解を次のように定義することができる．

**Definition 1.** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界な凸開集合，$\nu$ を $\Omega$ 上の非負 Borel 測度とする．このとき，凸関数 $u\in C^0(\Omega)$ が

$$H_k[u]=\nu \quad \text{in } \Omega \tag{4}$$

の**広義解** (*generalized solution*) であるとは，任意の $\eta\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対して $\sigma_k(u;\eta)=\nu(\eta)$ が成立することをいう．

$k = n$ のときは，上で定義された広義解の概念が，Aleksandrov, Bakel'man らによって導入された広義解の概念と一致することも証明できる．この定義により，今まで研究されてきた古典解や粘性解よりも広い非斉次項のクラスで曲率方程式を考えることができるようになった．本論文では，Theorem 2 で定義された測度や，広義解がもつ幾つかの性質についても論じている．

Theorem 2 は，凸関数 $u$ に関する Steiner 型公式を導くことにより証明される．

● 広義解のクラスにおける孤立特異点の除去可能性

(2) の解の原点における特異点の除去可能性の問題を，前項で定義した広義解のクラスでも考えてみる，という流れは自然であると思われる．この問題に関して，我々は次の定理を得た．

**Theorem 3.** $1 \leq k \leq n-1$ とする．このとき，局所凸関数 $u \in C^0(\Omega \setminus \{0\})$ が (2) の広義解ならば，$u$ は $H_k[u] = 0$ in $\Omega$ の広義解として原点まで連続に拡張できる．

この定理の証明方法は Theorem 1 とは本質的に異なる．まず凸関数の性質より $u$ は原点まで連続に拡張でき，拡張された関数 $\tilde{u}$ も凸関数となることを示す．次に，Theorem 2 により，$H_k[\tilde{u}]$ は $\Omega$ 上の有界な Borel 測度と考えることができるので，ある定数 $C \geq 0$ が存在して $\tilde{u}$ は

$$H_k[\tilde{u}] = C\delta_0 \quad \text{in } \Omega \tag{5}$$

の広義解であることがわかる．最後に，Theorem 2 で構成された $\sigma_k(u;\cdot)$ の特徴づけを用いて $C = 0$ を示し，その結果として Theorem 3 の結論が得られる．Theorem 3 の系として，$1 \leq k \leq n-1$ のときは $\delta$ 測度の正数倍を非斉次項にもつ曲率方程式の解は存在しないことがわかる．

また，非斉次項が一般に $\Omega$ 上の $L^1$ 関数であっても Theorem 3 と同様の結果が得られる．

最後に，この論文を書くにあたってご指導を頂いた，指導教官の保野博先生に深く感謝致します．