論文審査の結果の要旨

氏 名 滝本 和広

論文提出者 滝本 和広は，曲率方程式と呼ばれる，一般には完全非線形である 2 階微分方程式について考察し，その解の孤立特異点の除去可能性についての結果を得た．また広義解と呼ばれる解の概念を導入することに成功した．

論文提出者は，次のような曲率方程式について考察した．

$$H_k[u] = S_k(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) = \psi(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

但し，$u \in C^2(\Omega)$ に対して $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ は u のグラフの主曲率を表し，S_k $(k = 1, \ldots. n)$ は k 次基本対称関数を表す．

この方程式は，微分幾何学ではおなじみである極小曲面方程式 $(k = 1, \psi \equiv 0)$ やガウス曲率方程式 $(k = n)$ を一般化したものである．しかし，これらは比較的扱いやすいケースであり，論文提出者が考察している一般の k の場合は，非常に非線形性が強い方程式となるため，従来の線形理論の延長線上では捉えきれない厄介な性質をもっている．解の存在や正則性についての研究が始まったのは Caffarelli-Nirenberg-Spruck (1988) 以降のことであり，まだ未知の部分が多い研究領域である．

しかしながら，ここ最近物理学や数理ファイナンスなどの世界において，さまざまな完全非線形偏微分方程式が脚光を浴びている．その重要性にもかかわらず，ごく特殊なクラスを除いて，これらの方程式を解析する強力な方法が見つかっていないのが現状である．こうした方程式の解には種々の特異性が現れることが予想されるが，線形理論の延長線上の発想では限界があり，暗中模索の状況が続いていた．そのような流れの中で，論文提出者は曲率方程式 (1) に対して理論的な考察を与えた．

論文提出者の主な結果は次の 3 点である．

第一に，古典解より広い意味の解である粘性解のクラスにおいて，(1) の孤立特異点の除去可能性について研究し，$1 \leq k \leq n-1$ のとき解の連続性の仮定の下に孤立特異点が常に除去可能であることを示した (Theorem 1.1, 3.2)．

方程式 (1) が準線形方程式となる $k = 1$ のときには Bers (1951), De Giorgi-Stampacchia (1965) によって古典解の孤立特異点の除去可能性が示されているが，$2 \leq k \leq n$ の場合は完全非線形な方程式となるため，解析が非常に難しくなる．論文提出者は，Labutin (2000) が一様楕円型の完全非線形方程式において用いた手法を，一様楕円型でない (1) に応用した．この結果は Bers らの結果を数十年ぶりに改良したものである．また，$k = n$ の場

合は反例が存在するので，孤立特異点の除去可能性に関しては，$1 \le k \le n-1$ の場合と $k=n$ の場合では状況が一変することが明らかになった．

二番目に，粘性解より広いクラスの解である広義解の概念を導入し，(1) の可解性や解の正則性を論じる枠組を構築した (Theorem 4.1, Definition 4.2)．特に，(1) が凸関数解をもつためには，非斉次項 ψ が Borel 測度でなければならないことを示した．

この定理により，u が凸関数であれば，$H_k[u]$ は必ずボレル測度になるので，凸関数解のクラスにおいては，(1) の非斉次項 ψ をボレル測度にまで拡張して考えるのが自然であることがわかる．また，$k=n$ の場合，(1) は Monge-Ampère 型方程式となるが，ここで導入された広義解の概念は，Aleksandrov や Bakelman らが Monge-Ampère 型方程式に対して導入した広義解の概念と一致する．この定義により，古典解や粘性解より広い非斉次項のクラスで (1) を研究することができるようになった．

最後に，広義解のクラスにおいても同様の考察を行い，$1 \le k \le n-1$ ならば (1) の孤立特異点は常に除去可能であることを示した (Theorem 4.3)．

この定理の系として，$1 \le k \le n-1$ のときは δ 測度の正数倍を非斉次項にもつ曲率方程式の解は存在しないことがわかる．今後広義解の正則性や特異性を詳しく研究することにより，曲率方程式の新たな研究に突破口が開かれると期待され，多くの物理的な現象の深い理解につながると思われる．論文申請者の結果は，この分野における今後の研究の方向を示唆していると言えよう．

論文提出者の研究は，完全非線形方程式の重要なクラスに対して系統的な解析手法を確立することを目指すものであり，今後の解析に新しい展開を与えたものとして高く評価できる．

以上の諸点を考慮した結果，論文提出者 滝本 和広 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．