論文の内容の要旨

論文題目： Structure theorem for Kummer etale K-group
（Kummer etale K 群に対する構造定理）

氏　名： 萩原　啓

本論文の目的は、対数的代数多様体の Kummer etale K 群の構造を明らかにすることである。

主定理を正確に述べる前に、まず Kummer etale K 群の定義を説明する。一般に、(加藤和也氏の意味での) 対数的スキームが与えられたとき、それ上 Kummer etale なものを開集合と思うことで、Kummer etale サイトが定義できる。Kummer etale 射の定義についてはここでは述べないが、例えば非特異代数多様体 X とその上の単純正規交叉因子 D から作られる対数的代数多様体 (X, D) を考えた場合、D 上でのみ tame に分岐しその外では etale であるようなスキーム (に適当な対数構造を入れたもの) が (X, D) 上 Kummer etale な対数的スキームの典型的な例である。Kummer etale サイトは通常のスキームに対する etale サイトの一つの一般化であり、このサイト及びこれから定義される log. etale コホモロジーについては既に中山能力氏によって詳しく研究されている。

一方、任意に環付きトポスが与えられたとき、その上のベクトルバンドルというものが考えられる。そこで、これらベクトルバンドル全体のなす圏から Quillen 氏の Q 構成によって作られる CW 複体のホモトピー群として、環付きトポスの K 群というものを定義することができる。

本論文に於いては、環付きトポスとして Zariski 位相付きスキーム及びその上の構造層を考えたときに得られる K 群を古典的 K 群といい、Kummer etale 位相付き対数的スキーム及びその上の構造層から作られるものを Kummer etale K 群と呼ぶ。前者を $K_*(X)$、後者を $K_*(X_{\mathrm{Ket}})$ と表す ($*$ は次数)。通常、(代数的)K-群と呼ばれているもの

は前者であり、こちらについてはこれまで非常に多くの研究が成されており、今尚発展を続けている。

K 群はコホモロジー群等と並び非常に重要なスキームの不変量の一つであるが、その定義の複雑さの為に、K 群を計算することは一般には大変難しく、この構造を知ること自体、代数幾何学や K 理論における重要な課題の一つである。古典的な K 群についてはある程度は研究が進んでおり、いくつかの特別な場合に対しての計算例は知られているが、Kummer etale K 群に関してはその構造は殆ど知られていないというのが現状である。

このKummer etale K 群を、十分一般的な対数的代数多様体に対し、古典的な K-群を用いて表示することが本論文の主結果である。

具体的には、主定理は以下の式で表すことができる。

Theorem. 標数 p の分離閉体上の非特異代数多様体とその上の単純正規交叉因子の組 (X, D) から作られる対数的代数多様体に対し、そのKummer etale K 群 $K_*(X_{\mathrm{Ket}})$ は以下のように表される：

$$K_*(X_{\mathrm{Ket}}) \cong \bigoplus_{J \subset I} K_*(D_J) \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{\Lambda}'_{|J|}.$$

ここで I は D の既約成分の添字集合であり、I の各部分集合 $J = \{i_1, \cdots, i_r\}$ に対し、$D_J = D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_r}$ (但し、$D_\emptyset = X$ とする) と書く。また非負整数 r に対し $\tilde{\Lambda}'_r$ は集合 $\{(a_1, \cdots, a_r) | a_i \in (\oplus_{l \neq p} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \setminus \{0\}\}$ によって $\mathbb{Z}$ 上生成される自由Abel群を表すとする。すなわち右辺は古典的 K 群 $K_*(D_J)$ と対数的幾何学特有の修正項 $\tilde{\Lambda}'_{|J|}$ とのテンソル積を、全ての因子の交叉に関して直和したものとして表される。

古典的な K 群の構造を知るという問題は依然として残っているにせよ、この定理によりKummer etale K 群の計算はほぼ完全に古典的 K 群のそれに還元されたことになる。

証明はdevissageによって X が0次元の場合に帰着した後、0次元の場合の計算を同変 K 群の計算に帰着して行う、という順でなされる。この際必要なのがKummer etale位相における連接加群、及び標準フレーム付き対数的代数多様体の概念の導入である。

前者は通常の連接加群の自然な一般化である。古典的には連接加群の成す圏に対してもQuillenの手続きを踏むことによって別種の K 群を得られることが知られている。これは通常 $K'_*(X)$ などと表され、良い仮定の下ではこれがベクトルバンドルから作られるものに一致すること：$K_*(X) \cong K'_*(X)$ が知られている。$K'_*(X)$ に対しては局所化完全系列と呼ばれる完全系列が存在する為、しばしば $K_*(X)$ より $K'_*(X)$ の方が計算が容易である。本論文では先ずこの類似として、Kummer etale位相における連接加群の概念及びその K 群 $K'_*(X_{\mathrm{Ket}})$ を定義し、これに対しても局所化完全系列が存在すること、$K_*(X_{\mathrm{Ket}}) \cong K'_*(X_{\mathrm{Ket}})$ が適当な仮定の下で成立すること、を示している。これにより上の $K_*(X_{\mathrm{Ket}})$ の計算を、より容易な $K'_*(X_{\mathrm{Ket}})$ の計算に帰着できる。

その後、$K'_*(X_{\mathrm{Ket}})$ に対する局所化完全系列を使ってdevissageを行うことで、0次元の対数的代数多様体の場合の計算に帰着するのであるが、この際devissageを円滑に行う為に本論文で導入しているのが、標準フレーム付き対数的代数多様体と呼ばれる概念である。

標準フレーム付き対数的代数多様体とは、先に挙げた (X, D) のような形の対数的代数多様体は全て含む、より一般的な概念であり、本論文では先の主定理は任意の標準フレーム付き対数的代数多様体に対する定理として定式化され、証明されている。

対数的幾何学に於いて興味深いのは主定理のような状況であり、全く一般の標準フレーム付き対数的代数多様体というものは元来それほど興味深い研究対象ではない。しかし、devissage を適切に行なう為には、考察する対象の範囲をこのような十分に広い対数的代数多様体のクラスへ拡張しておくことがどうしても必要となる。

0 次元の対数的代数多様体に対する K' 群を計算する為には、同変 K' 群というものを用いる。後者は古典的によく知られており、Thomason 等により様々な研究が行われている。本論文では 0 次元の対数的多様体の Kummer etale K' 群と同変 K' 群の帰納的極限との間の同型を通じて、前者の計算を後者の計算に帰着し、これを可能にしている。