論文の内容の要旨

論文題目：Quantization of the moduli space of flat connections on a punctured Riemann surface based on symplectic geometry
（シンプレクティック幾何に基づいた点付きリーマン面上の平坦接続のモジュライの量子化）

氏名：吉田尚彦

閉 Riemann 面上の平坦接続のモジュライとその上の前量子化束（pre-quantum line bundle）は、接続の空間へのゲージ群作用のシンプレクティック商として構成できることが Atiyah-Bott、Ramadas-Singer-Weitsman によって知られている。この論文の目的は、この構成を点付き Riemann 面上の平坦接続のモジュライに対して一般化することである。以下に主結果を述べる。$\overline{\Sigma}$ を種数 g の閉 Riemann 面、p_1, ..., p_m を $\overline{\Sigma}$ の m 個の点、P_Σ を $\overline{\Sigma}$ から p_1, ..., p_m を取り除いた Riemann 面 $\Sigma = \overline{\Sigma}\setminus\{p_1, \ldots, p_m\}$ 上の自明な主 $SU(n)$ 束とする。P_Σ の接続全体の空間を $\mathcal{A}_\Sigma$、ゲージ群を $\mathcal{G}_\Sigma$ とそれぞれ書く。$\mathcal{G}_\Sigma$ は $\mathcal{A}_\Sigma$ に引き戻しによって作用する。T を対角行列からなる $SU(n)$ の極大トーラス、その Lie 環を $\mathfrak{h}$ で表す。$\mathfrak{h}$ の m 個の元 λ_1, ..., λ_m に対して、点付き Riemann 面上の平坦 $SU(n)$ 接続のモジュライ $\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ を以下で定義する

$$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) = \{A \in \mathcal{A}_\Sigma | F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A] = 0,\ \mathrm{hol}_A(p_j) \in \mathcal{O}_{e^{\lambda_j}}\}/\mathcal{G}_\Sigma,$$

ここで $\mathrm{hol}_A(p_j)$ は A による p_j の周りのホロノミー、$\mathcal{O}_{e^{\lambda_j}}$ は e^{λ_j} の共役類である。次が主定理である。

定理 1.（1）全ての λ_j がアルコーブ（alcove）Δ の元（regular element）ならば、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ は各 p_j の近傍で T に値をとる定値写像となるゲージ変換のなすゲージ群作用のシンプレクティック商として幾何的に構成できる。

（２）任意のワイル群の元 $w_j \in W$ に対して、$\sum_{j=1}^{m} w_j\lambda_j$ が次の集合

$$\{\sum_{\alpha\in R} a_\alpha h_\alpha \in \mathfrak{h} |\ 0 \text{でない係数をもつ}\ h_\alpha\ \text{たちは}\ \mathfrak{h}\ \text{を張る}\}$$

に含まれるならば、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ は滑らかなシンプレクティック多様体になる。ここで、$w_j\lambda_j$ は w_j の λ_j への作用を、R は $SU(n)$ のルート系、h_α はルート α のコルート（coroot）を表す。特に、$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Delta$ の時、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ の次元は

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) = (2g-2)(n^2-1) + mn(n-1)$$

で与えられる。

$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ のシンプレクティック形式を ω と書くことにする。

注 1. （１）定理１の条件について説明する。$SU(n)$ の任意の元 g に対して、アルコーブの閉包の元 $\lambda \in \overline{\Delta}$ で g が e^λ と共役になるようなものが存在することが知られている。したがって、共役類を固定するためには λ_j は $\overline{\Delta}$ から選べばよく、この意味で、定理１の条件は一般的な条件である。尚、λ_j が $\partial\overline{\Delta}$ の元の場合は、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ の別の構成法がある。
（２）Σ の複素構造を一つ固定すると、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ に ω と整合的（compatible）な概複素構造を入れることができる。これは積分可能であると思われるがまだ検証中である。

定理 2. k を正の整数、$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Delta$ とする。また、極大トーラスの Lie 環 $\mathfrak{h}$ とその双対空間 $\mathfrak{h}^*$ を正規化された Killing 形式によって同一視する。このとき、全ての $k\lambda_j$ がレベル k の支配的ウェイト（dominant weight）ならば、$(\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}), k\omega)$ 上に前量子化束が存在する。ここで、$(\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}), k\omega)$ 上の前量子化束とは、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ 上のエルミート直線束（hermitian line bundle）と、その上の第一 Chern 形式が $k\omega$ となるエルミート接続（hermitian connection）の組のことである。これらもシンプレクティック商を用いて幾何的に構成できる。

注 2. （１）定理１、定理２の構成は Atiyah-Bott、Ramadas-Singer-Weitsman の構成の一般化になっている。尚、G が $SU(2)$ の場合には、前量子化束の同様な構成法が今野宏によって知られている。
（２）レベル k の支配的ウェイトはアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}}$ のレベル k、最高ウエイト表現に対応している。アフィン Lie 環の表現は共形場理論において、重要な役割を果たす。
（３）定理１、定理２の構成は、一般のコンパクト、連結、単連結な Lie 群の場合にも適用できると思われる。

次に、モジュライとその上の前量子化束の構成法について述べる。重要なポイントは、各 p_j の近傍での形を固定したゲージ変換と接続のみを考える点である。以下に構成のアイディアを述べる。閉 Riemann 面の場合の Atiyah-Bott の構成法においては、ゲージ群の接続の空間へ

の作用がモーメントマップを持った。(ポイントをはっきりさせるために、有限個の点を除いたRiemann面ではなく)境界付きRiemann面の場合にこれと同じことをしようとすると、今度は障害類が現れる。しかし、障害類の形はゲージ群がモーメントマップを持つための二つの方法を示唆する。一つ目がゲージ群の中心拡大をとる方法で、λ_j に条件をつけることなくモジュライを構成することができる。これが、注1(1)にある別の構成法である。しかし、この方法は複素幾何との相性が悪く、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ の複素構造が具体的にどのように入るのかなどは見えない。また、コホモロジーの計算法との相性も悪い。本論文でも、これ以上立ち入らない。

二つ目がゲージ群に条件をつける方法で、本論文では有限個の点 $p_1, \ldots, p_m$ を除いたRiemann面 Σ に対してこの方法を扱う。上の障害類は、各 p_j の近傍で定値写像であるようなゲージ変換のみからなるゲージ群 $\mathcal{G}_{\Sigma,T}$ に制限すれば解消される。次に、このようなゲージ群作用のシンプレクティック商として、いつ $\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ が得られるかを考察すると、ゲージ群に対応して、接続を各 p_j の近傍で決まった形を持つものに制限すればよいだけでなく、定理1にある全ての λ_j がアルコーブに含まれる、という条件が必要になる。

各 p_j の近傍で決まった形を持つ接続の空間はアフィンシンプレクティック空間であるため、前量子化束が存在する。一方、シンプレクティック形式を保つLie群 G の作用をもつシンプレクティック多様体上に前量子化束がある場合、モーメントマップは G の前量子化束への無限小作用に対応する。我々の場合、全ての $k\lambda_j$ がレベル k の支配的ウェイトであるとき、この無限小作用は積分可能になり、前量子化束も含めたシンプレクティック商をとることができる。

最後に、この構成法のもつ可能性について、少しだけ述べておく。本論文の設定の下では、Riemann面はノンコンパクトであるにもかかわらずYang-Mills汎関数が定義でき、Atiyah-Bottの場合と同様、これは作用のモーメントマップのノルムの二乗となっている。臨界多様体(critical manifold)、Hesse行列、同変Morse指数等も閉Riemann面上の時と同様の議論で記述できる。