論文の内容の要旨

論文題目 Noncommutative homotopy algebras associated with open strings

(開弦に付随する非可換ホモトピー代数)

氏名 梶浦宏成

ホモトピー代数の典型例として A_∞ 代数というものがある. それは, もともとは点付きループ空間に入る代数構造として, J. Stasheff により導入され, 最近ではミラー対称性, 位相的場の理論, 弦の場の理論などの数理物理においても様々な応用がある. この論文では, [2] の拡張版として, A_∞ 代数の一般的な性質と, その開弦の物理への応用について議論した.

$\mathcal{H}$ を次数付きベクトル空間とし, 多重線形写像 $\mathbf{m} := \{m_n : (\mathcal{H})^{\otimes n} \to \mathcal{H}\}_{n\geq 1}$ が与えられているとする. $\mathbf{m}$ が $n \geq 1$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathcal{H}$ に対して以下の関係式

$$\sum_{k+l=n+1,k,l\geq 1} \sum_{i=0}^{n+l-1} \pm m_k(\mathbf{e}_1, \cdots, m_l(\mathbf{e}_{i+1}, \cdots, \mathbf{e}_{i+l}), \cdots, \mathbf{e}_{n+1}) = 0$$

を満たす時, $(\mathcal{H}, \mathbf{m})$ は A_∞ 代数と呼ばれる. 簡単な場合として, $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ の時は m_2 は結合的であり, $(\mathcal{H}, \mathbf{m})$ は m_1 を微分とする次数付き微分環となる. 一般には m_2 は結合的でなく, その結合性からのずれがホモトピー m_3 で決まっている. さらに $m_k, k \geq 4$ は高次のホモトピーとみなされる.

本論文ではこのような代数構造を開弦の場の理論に応用する. 弦の場の理論は, 弦が共形対称性を持つ背景時空の上で定義される. $\mathcal{H}$ を開弦の場の状態とし, その基底 $\mathbf{e}_i$ それぞれに対応する (場の理論の意味での) 場を $\phi^i \in \mathcal{H}^*$ ととり, 開弦場 $\Phi = \mathbf{e}_i\phi^i$ を定義する. ここで $\mathcal{H}^*$ は $\mathcal{H}$ の双対とする. 演算は $\mathcal{H}^*$ の自由テンソル代数 $C(\mathcal{H}^*)$ 上で定義する. そして作用は以下の形のものを考える.

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\omega(\Phi, Q\Phi) + \sum_{k\geq 3} \frac{1}{k}\mathcal{V}_k(\Phi, \cdots, \Phi) \ . \tag{1}$$

$\omega(\ ,\ ) : \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ は BPZ 内積, $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は BRST 作用素と呼ばれるもので, 開弦場 Φ を含めてこれらは固定した背景時空上正準的に決まっている. つまり Φ に関して 2 次の部分は固定されている. BRST 作用素は $(Q)^2 = 0$ を満たすことから BRST 複体 $(\mathcal{H}, Q)$ が定義される. 通常の 2 次元面の弦理論において, その散乱振幅は, 対応するリーマン面のモジュライ空間上のある微分形式の積分であり, その結果 BRST コホモロジー上の多重線形写像 $H(\mathcal{H}) \otimes \cdots \otimes H(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ が得られる. これに対し, 弦の場の理論の構成することは, その場の理論の摂動理論によるファインマン則が対応する弦理論の散乱振幅を再現するように 3 次以上の相互作用項 $\mathcal{V}_k : \mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ を構成することである. よって通常弦の場の理論は, 対応するリーマン面のモジュライ

空間をファインマン則に従うよう分解し, $\mathcal{V}_k$ をそのモジュライ空間の部分空間上の積分とすることによって得られる. そのような作用は実は無限個ある. しかし, この構成より, 弦の場の理論の作用はゲージ理論における Batalin-Vilkovisky(BV) 形式の BV マスター方程式を満たす. さらに, 対応するリーマン面を disk に限って構成される古典的な開弦の場の理論は, 古典的 BV マスター方程式を満たす. この時, 作用 (1) はサイクリックな対称性を持つ.

実は, 一般に, 古典的 BV マスター方程式を満たすサイクリックな場の理論は A_∞ 代数構造を持つ (**定理 6.1**). 実際, 相互作用項を

$$\mathcal{V}_{k+1}(\Phi,\cdots,\Phi)=\omega(\Phi,m_k(\Phi,\cdots,\Phi))$$

と表し, $m_1=Q$ とすると $(\mathcal{H},\mathfrak{m})$ は A_∞ 代数を定める. しかし, 今 $\mathcal{V}_k$ はサイクリックである. つまり, A_∞ 構造 $\mathfrak{m}$ は内積 ω を通じてサイクリックであるという付加的な構造を持つ. これをサイクリック A_∞ 代数と呼ぶ. このような A_∞ 代数は数理物理においていくらか扱われているが, その代数の性質に関するいくつかの結果も本論文における新しい結果の一部である.

以上のような代数構造は, $\mathcal{H}$ 上の形式的巾級数環 $C(\mathcal{H}^*)$ を考えることにより幾何学的に理解できる. 場 $\{\phi^i\}\in\mathcal{H}^*$ は非可換なので, $(\mathcal{H},C(\mathcal{H}^*))$ を形式的非可換超多様体と呼ぶ. A_∞ 構造 $\mathfrak{m}$ は $(\mathcal{H},C(\mathcal{H}^*))$ 上の形式的ベクトル場とみなせる. サイクリックな場合, その内積 ω は実は形式的非可換超多様体上の定数シンプレクティック形式を定める. しかし, 座標変換により ω は一般には非定数に変換されるため, そのような形式的非可換超多様体上の一般のシンプレクティック形式の性質について考えることは重要である. 本論文では, このような形式的非可換超多様体の局所的な性質を調べた. 可換な時と同様ポアンカレの補題が成り立つ (**補題 4.1**). さらに, 形式的非可換超多様体上のシンプレクティック形式の一般的なクラスを定義し, ダルブーの定理 (**定理 4.1**) を示した.

さて, A_∞ 代数などのホモトピー代数における重要な概念は, それらのホモトピー同値性である. 二つの A_∞ 代数は, それらが A_∞ 擬同型写像で移りあう時ホモトピー同値であると言われる. ここで A_∞ 擬同型写像とは, A_∞ 代数 $(\mathcal{H},\mathfrak{m})$ の複体 $(\mathcal{H},m_1)$ に対するコホモロジーを保つ A_∞ 写像のことである. 実は, 任意の A_∞ 代数 $(\mathcal{H},\mathfrak{m})$ は, それと A_∞ 擬同型な, コホモロジー $H^\cdot(\mathcal{H})$ 上の A_∞ 代数（これを minimal model と呼ぶ）を持つことが知られている. これは, minimal model 定理 [1] と呼ばれ, ホモトピー代数構造を理解する鍵となる. 例えば, Sullivan の導入した有理ホモトピー理論における微分形式の成す次数付き微分環（つまり m_1 が外微分, m_2 が wedge 積, $m_3=m_4=\cdots=0$）を 1 つの A_∞ 代数とした場合, その minimal model の $m_3,m_4,\cdots$ は高次のマッセイ積に対応する. つまり, ある多様体の有理ホモトピー型は, ドラーム複体の代わりにドラームコホモロジー上に高次のマッセイ積に対応する A_∞ 構造を考えることによって回復できる. 開弦の場の理論においては, そのサイクリック A_∞ 代数 $(\mathcal{H},\omega,\mathfrak{m})$ の minimal model はまさに（2 次元面の）開弦の散乱振幅そのものである [2].

M. Kontsevich は L_∞ 代数の場合に, この minimal model を含むより強い定理の存在とその証明の方針について触れている [3]. これは minimal model 定理の意味をより深く理解することを可能にする. 本論文ではこれを decomposition theorem と呼び, これを A_∞ 代数の場合 (**定理 5.2**), サイクリック A_∞ 代数の場合 (**定理 5.3**) について示し, それから得られる様々な帰結について議論した. 開弦の場の理論に対しては, これを応用することにより以下の定理を得た.

定理 6.2　ある共形対称性を持つ背景時空上で定義されるすべての開弦の場の理論は, サイクリック A_∞ 同型である.

ここで, サイクリック A_∞ 同型とは, 場の理論における場の再定義にほかならない. 場の理論において, 場の再定義で移りあう作用は等価であるとみなされることから, 物理的には, 上の定理は 1 つの背景時空上のすべての開弦の場の理論が等価であることを意味する.

以上の本論文の結果は A_∞ 代数を L_∞ 代数におきかえてもすべて成り立つ. 弦の場の理論においては, サイクリック L_∞ 代数構造を持つものは, リーマン面を球面にかぎって構成される古典的閉弦の場の理論である.

[1] T. V. Kadeishvili, (Russian) Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 108 (1982), no. 2, 249–252 (1983).

[2] H. Kajiura, Nucl. Phys. B **630** (2002) 361 [arXiv:hep-th/0112228].

[3] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," q-alg/9709040.