論文審査の結果の要旨

氏　名　梶浦宏成

論文題目　Noncommutative homotopy algebras associated with open strings
（開弦に付随する非可換ホモトピー代数）

ホモトピー代数は、ループ空間に入る代数構造として J. Stasheff により導入され、Chen の反復積分や Sullivan の有理ホモトピー理論等に応用された。最近では数理物理学、特に弦理論においてもホモトピー的な考え方の有効性が再認識され、ミラー対称性、位相的場の理論、弦の場の理論などへの応用されつつある。特に Kontsevich によってミラー対称性予想の圏論的定式化がされ、現在精力的な研究が行われている。この論文では,非可換なホモトピー代数である A_∞ 代数の一般的な性質とその弦理論への応用を論じている。

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間とする。$\mathcal{H}$ 上の次数 1 の多重線形写像の系列 $\mathfrak{m} := \{m_n : \mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{H}\}_{n\geq 1}$ が $n = 1, 2, 3, \ldots,\quad e_1, \cdots, e_{n+1} \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sum_{k+l=n+1, k,l\geq 1} \sum_{i=0}^{n+l-1} \pm m_k(e_1, \cdots, m_l(e_{i+1}, \cdots, e_{i+l}), \cdots, e_{n+1}) = 0$$

という関係を満たす時、$(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ を A_∞ 代数と呼ぶ。2 つの A_∞ 代数 $(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ から $(\mathcal{H}', \mathfrak{m}')$ への射も定義されるが、その定義はかなり複雑である。

一般に、ホモトピー代数の対象や射の公理系は、無限個の多重線型写像の間に成り立つ無限個の両立条件として与えられるため、非常に煩雑で本質が見えにくい。本論文の特徴は、「ホモトピー代数の双対圏にあたる非可換超多様体の圏を導入し、そこで幾何学的に得られた定理をもとのホモトピー代数圏での定理に翻訳する」という方法論を用いていることである。$\mathcal{H}$ の基底 $\{e_i\}$ を一つ固定し、対応する座標 $\phi^i \in \mathcal{H}^*$ によって生成される形式的非可換ベキ級数環を $C(\phi)$ で表すと、これは自由テンソル代数として非可換結合的代数の構造を持つ。組 $(\mathcal{H}, C(\phi))$ を形式的非可換超多様体と呼ぶ。これは $\mathbb{C}^n$ の原点近傍を扱うために $\mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_n]]$ を考えることの非可換類似物になっている。A_∞ 代数の構造定数 $m_k(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = e_i c^i_{i_1 \cdots i_k}$ を用いて $\delta = \sum_n \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \phi^i} c^i_{i_1 \cdots i_n} \phi^{i_1} \cdots \phi^{i_n}$ という「ベクトル場」を導入すれば、$(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ が A_∞ 代数であることと、$\delta^2 = 0$ とが等価になる。また、A_∞ 射も、δ と可換な射として自然に理解される。すなわち A_∞ 代数の圏は、「非可換 de Rham 理論を展開できる幾何学的な対象のなす圏」の双対圏と見なすことができる。

A_∞ 代数 $(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ が、さらに非退化二次形式 $\omega : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ を持ち、$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\omega(m_k(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k), \boldsymbol{v}_{k+1})$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{k+1}$ の巡回置換で不変であるとき、これを cyclic A_∞ 代数という。これは形式的非可換超多様体上のシンプレクティック構造という枠組みで幾何学的に捉え直すことができる。特に、Batalin-Vilkovisky 形式の作用汎関数 S は、δ を Hamilton 流として生成する母関数として、また master 方程式 $(S, S) = 0$ は $\delta^2 = 0$ を保証する条件として幾何学的に理解できる。本論文では、このような立場から形式的非可換超多様体の局所的な性質を調べ、ポアンカレの補題 (**補題 4.1**) やダルブーの定理 (**定理 4.1**) の非可換類似が成り立つことを示した。

ホモトピー代数における基本概念は、それらのホモトピー同値性である。A_∞ 代数 $(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ に付随する鎖複体 $(\mathcal{H}, m_1)$ にコホモロジーの同型を誘導する A_∞ 写像のことを A_∞ 擬同型写像といい、A_∞ 擬同型写像で移りあう二つの A_∞ 代数はホモトピー同値であると呼ばれる。 基本的な結果として、任意の A_∞ 代数 $(\mathcal{H}, \mathfrak{m})$ は、それと A_∞ 擬同型なコホモロジー $H^\bullet(\mathcal{H})$ 上の A_∞ 代数を持つことが知られている (minimal model 定理)。M. Kontsevich は L_∞ 代数の場合にこの minimal model を系として含むより強い定理について示唆したが、本論文ではその A_∞ 代数版 (**定理 5.2**)、cyclic A_∞ 代数版 (**定理 5.3**) を証明した。これら "decomposition theorem" と名付けられた結果は、minimal model だけでなく、cohomological に自明な部分 (contractible part) への分解を擬同型ではなく A_∞ 同型として、しかも作用関数レベルで与えており、minimal model の大幅な精密化を実願した。これらは (cyclic) A_∞ 代数の一般的な結果であるが、弦理論にこれを応用すると、「共形不変性を持つ背景時空上で定義されるすべての開弦の場の理論は、場の再定義を通してサイクリック A_∞ 同型である.」(**定理 6.2**) ことが導かれた。

以上の本論文の結果は A_∞ 代数を L_∞ 代数におきかえてもすべて成り立つ。弦理論への応用としては、サイクリック L_∞ 代数構造を持つものは、世界面が球面である古典的閉弦の場の理論に対応する。

このように、論文提出者の研究は従来のホモトピー代数の手法を、幾何学的な双対描像に持ち込むことによって、従来のホモロジーレベルの結果をホモトピーレベルに持ち上げた形で精密化・一般化し、また弦の場の理論の研究に新たな視点を切り開いた点で、非常に価値の高いものである。よって、論文提出者梶浦宏成は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。