論文の内容の要旨

論文題目：**Equivariant bundles on Group completions**

(簡約群のコンパクト化上の同変ベクトル束)

氏 名：加藤 周

1 導入

本論文では標数0の代数閉体上の簡約代数群Gの$G \times G$-同変コンパクト化Xであって境界が正規交叉因子となるもの上の同変なベクトル束の成す圏を線形代数のデータを用いて記述する。このような記述はKlyachko [1]によるトーリックの場合の記述の非可換群への拡張であるが、群が非可換で左右の作用が同一視できない事により新しい拘束条件が生じる。定理の応用として、特定の性質をもつような同変ベクトル束は存在しないというタイプの結果とまた逆にKostantにより存在が予想されていたある性質をもつ同変ベクトル束が存在するというタイプの結果の両方が得られる。

2 設定

論文本体の設定では$G \times G$-同変なベクトル束ではなく、そのある有限被覆に対して枠組みが定式化されているのであるが、簡略化のため要旨においては有限被覆は取らないことにする。

TをGの極大トーラス、BをTを含むGのBorel部分群とする。$X^*(T)$をTの指標群、$X_*(T)$をTの余指標群とし、その間のpairingを$\langle , \rangle$で表す。

さて、W を $(G;T)$ の Weyl 群とする。この時、$X^*(\tilde{T}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ への W-作用の延長の基本領域 (の閉包) を C_+ とおく。以上の設定の元で次の定理が成立する。

定理 2.1 (宇沢 [3]). G の代数多様体としての $G \times G$-同変なコンパクト化 X であって平滑かつ境界が正規交叉因子となるものは $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ の扇 Σ であって $\mathrm{Supp}\Sigma = C_+$ を満たすものと 1 対 1 に対応する。さらに、この時 X の $G \times G$-軌道の集合と扇 Σ の間に 1 対 1 対応が存在する。

ここで扇とはトーリック多様体の理論の意味での扇 (cf. 小田 [2]) であり、特に錐の集合である。以下、X と対応する扇 Σ を一つ固定する。さて、扇 Σ に対してその 1 次元の錐の集合を $\Sigma(1)$ とおく。また、記号の乱用で $\sigma \in \Sigma$ によって、錐 σ とその面の成す Σ の部分扇を表す。さらに、各 1 次元錐 $\eta \in \Sigma(1)$ と同じ記号で $\eta \cap X_*(T)$ の最小の生成元も表すことにする。(つまり η は T の 1 助変数部分群とも見なせる。) そして、各 $\eta \in \Sigma(1)$ に対して G の放物型部分群 P^η を次で定義する。

$$P^\eta := \{g \in G; \exists \lim_{t \to \infty} \eta(t) g \eta(t)^{-1} \in G\}$$

$EV(X)_{ad}$ で X 上の $G \times G$-同変ベクトル束を対象とし、同変な連接層としての射を射とする圏を表す。

定義 2.2. 圏 $\mathcal{C}(\Sigma)_{ad}$ を次で定義する*:*

Object: G-加群 V とその $\Sigma(1)$ によってインデックスされた $\mathbf{Z}$-減少フィルターの族の組 $\{F^\eta\}_{\eta \in \Sigma(1)}$ であって次の条件を満たすもの

1. 各 $\eta \in \Sigma(1)$ と各 $n \in \mathbf{Z}$ に対して $F^\eta(n)$ は P^η-加群。
2. 各 $\eta \in \Sigma(1)$ と各 $n \in \mathbf{Z}$、そして $\langle \eta, \alpha \rangle < 0$ を満たす任意のルートに対応する $\mathfrak{g}(= \mathrm{Lie}G)$ のルートベクトル e_α に対して $e_\alpha F^\eta(n) \subset F^\eta(n + \langle \eta, \alpha \rangle)$。
3. 全ての $\sigma \in \Sigma$ に対してある V の基底 B^σ が存在して、任意の $\eta \in \sigma(1)$ と任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して $F^\eta(n)$ は B^σ の部分集合からなる基底を持つ。

Morphism: $(V_1, \{F^\eta\}_{\eta \in \Sigma}), (V_2, \{G^\eta\}_{\eta \in \Sigma}) \in \mathcal{C}(\Sigma)_{ad}$ の間の射の集合を $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ の部分集合として次のように定義する。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\Sigma)}((V, \{F^\eta\}_{\eta \in \Sigma}), (W, \{G^\eta\}_{\eta \in \Sigma})) := \{f : V_1 \to V_2; f(F^\eta(n)) \subset G^\eta(n), \forall n \in \mathbf{Z}\}$$

さて、各 $G \times G$-同変ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対し、G の原点に対応する点でのファイバーを $B(\mathcal{E})$ として、$\mathcal{E}$ の全空間を $V(\mathcal{E})$ とする。また各 $\eta \in \Sigma(1)$ に対して

$$F^\eta(n, \mathcal{E}) := \{v \in B(\mathcal{E}); \exists \lim_{t \to \infty} t^n (1 \times \eta(t)) v \in V(\mathcal{E})\}$$

とおき、さらに $\Xi(\mathcal{E}) := (B(\mathcal{E}), \{F^\eta(\bullet, \mathcal{E})\}_{\eta \in \Sigma(1)})$ とおく。

3 結果

定理 3.1 (Theorem D). 上記の状況において Ξ は圏同値

$$\Xi : EV\left(\Sigma\right)_{ad} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}\left(\Sigma\right)_{ad}$$

へと延長される。

上の定理の応用として、次の2つの結果が導かれる。定理3.2は同変なベクトル束はあまり存在しないといった方向の結果であり、定理3.3は逆に特定の性質を満たすものならば必ず存在するという方向の結果で、Kostantにより予想されていた結果の $(G \times G, G)$ という特別な対称対の場合である。

定理 3.2 (Theorem G). G を随伴型単純代数群、X を G の標準的コンパクト化とする。その時、X 上の $G \times G$-同変ベクトル束でランクが G のランクよりも低いものは $G \times G$ 同変な直線束の直和に分裂する。

定理 3.3 (Theorem F). G を随伴型半単純代数群、X を G の標準的コンパクト化とする。V を G の既約表現とすると、次の3つの性質を持つ X 上の $G \times G$-同変ベクトル束 $\mathcal{E}_V$ が同型を除いて一意的に定まる。

1. $\mathcal{E}_V|_G \cong V \otimes_k \mathcal{O}_G$;

2. 全ての *1* 助変数部分群 $\eta : \mathbb{G}_m \to G$ と全ての $v \in \mathcal{E}_V \otimes k(e)$ に対して

$$\lim_{t \to 0}(\eta(t) \times \eta^{-1}(t))v$$

が $V\left(\mathcal{E}_V\right)$ 内に存在する。

3. 上の *1.* と *2.* を満たす任意の $G \times G$-同変ベクトル束 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}_V$ に $G \times G$-同変に埋め込むことが出来る。

Acknowledgements: 指導教官の松本久義先生ならびに上述の研究をそれぞれいろいろな意味で助けて頂いた方々、特に Michel Brion, Bertram Kostant, Friedrich Knop, 西山享、大島利雄, 関口次郎, Tonny Albert Springer と Alexis Tchoudjem の各氏に感謝します。

参考文献

[1] A. A. Klyachko, Equivariant vector bundles on toral varieties, *Math. USSR Izvestiya* **35**, No. 2, (1990) 337–375.

[2] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊國屋数学叢書 24, 紀伊國屋書店 1985.

[3] T. Uzawa, On equivariant completions of algebraic symmetric spaces. *Algebraic and topological theories* (Kinosaki, 1984), 569–577, Kinokuniya, Tokyo 1986.