論文の内容の要旨

論文題目：Semiconjugacies in complex dynamics with parabolic cycles
(放物的周期系を持つ複素力学系における半共役)

氏　名：川平　友規

1　第1章の概要

この章では，Riemann 球面上の次数 d (>1) の有理写像による力学系を考え，その摂動（次数 d の有理写像全体 Rat_d の一様収束位相に関して微小変化させること）に対する安定性を調べる．特に力学系のカオス部分・Julia 集合とその上の力学系について，放物的分岐と呼ばれる現象下における構造安定性を調べることが目的である．ここで力学系が構造安定とは，運動法則である有理写像をわずかに摂動させても，摂動前後の底空間の間に力学系の作用を完全に保存する同相写像（共役写像）が存在すること（要するに，力学系が位相的には変化しないこと）をいう．Julia 集合は力学系の完全不変集合であり，それ自体が独立した力学系の構造をもっている．特に Julia 集合上に制限した力学系の構造安定性（**J-安定性**）を考えるのは，全体の力学系の構造安定性を考えるための重要な手がかりとなるからである．

1980 年代初頭，Mañe, Sad, Sullivan は有理写像 f を Rat_d 内の点とみなしたとき，吸引周期系の個数が一定となるような連結近傍が存在するならば，f は J-安定であることを示した．J-安定でなければ明らかに全体力学系は構造安定でないから，構造不安定性には吸引周期系の個数変化が伴うことがわかる．では，どのような有理写像の摂動においてそのような個数変化が起こるのだろうか？

方程式 $f^n(z) = z$（ただし，f^n は f の n 回反復）の重解を f の**放物的周期点** (parabolic periodic point) と呼ぶ．これは複数の周期点が退化したものである．従って放物的周期点を持つ有理写像を摂動すると，退化していた周期点達が再び分岐し，吸引周期点個数も変化しうる．これが放物的分岐と呼ばれる現象である．この現象下，周期点近傍の力学系の変化は全体の力学系にまで激しく伝播する．特に Julia 集合の位相的・力学系的変化は極めて多様である．したがって，放物的分岐を制御しつつ J-安定性の限界を探れば，構造安定と不安定の境界構造を突き止める糸口を得るであろう．

以上を背景として，この章では**幾何学的有限** (geometrically finite) な有理写像に焦点を当て，放物的分岐現象下におけるその J-安定性について論じた．幾何学的有限な有理写像は放物的周期点を持ち得るだけでなく，カテゴリーとしては双曲的な有理写像をも含む比較的広範な（Rat_d 内に稠密に存在すると予想されている）対象である．主な結果として，放物的分岐および特異点軌道を制御しつつ摂動した有理写像族においては，幾何学的有限な有理写像が弱い（しかし，独特の）J-安定性を持つことを示した．

2　第１章の主定理

Riemann 球面上の次数 $d > 1$ の有理写像 f を固定する．ある点 z が f の Julia 集合に属するとは，z の任意近傍上で関数族 $\{f^n\}$ が正規族にならないことと定義する．正規性は関数族の点列コンパクト性にあたる概念である．したがって，点 z の近傍では関数族 $\{f^n\}$ は非コンパクトであり，その軌道 $z \mapsto f(z) \mapsto f^2(z) \mapsto \cdots$ の摂動に対する不安定性を示唆している．また，Julia 集合の補集合を安定領域（もしくは Fatou 集合）と呼ぶ．

さて f が幾何学的有限であるとは，Julia 集合に含まれる特異点（分岐点）が全て前周期的であることをいう．このとき f の安定領域内の点は吸引または放物的周期点に収束し，無理的回転領域はもたない．この f に対し，Julia 集合上の力学系を保存するような摂動方向を決定したい．特に，その共役写像を具体的に構成したい．

まずは何より，放物的分岐を制御しなくてはならない．ここでは McMullen の円接的摂動 (horocyclic perturbation, 1997) と呼ばれる概念を導入する．これは放物的周期点に対し，分岐した周期点の配置がある種の対称性を保ち，かつそれぞれの固有値が無理的回転を示唆する固有値方向へ変化しないことを要求するものである．円接的摂動のもと，放物的周期点の重複度を $n+1$ とした場合，その分岐の可能性は (1)1 個の放物周期点のまま（重複度 $n+1$），(2)1 個の反発周期点と n 個の吸引周期点，(3)1 個の吸引周期点と n 個の反発周期点，の 3 通りに絞られる．

次に，Julia 集合上の特異点の分岐を制御する．ある点の f による逆像は重複度をこめて一般に d 個あるが，その重複した点が特異点である．これも摂動により分岐し得るため，特異点軌道の変化は力学系変化の大きな要因となる．ここでは Julia 集合上の特異点についてのみ，軌道の重複度および前周期性が摂動において保存されることを仮定する．

さて以上のもと，次の定理が示される：

定理　幾何学的有限な f に上のような摂動を施す．このとき，放物的周期点が全て (1) か (2) に分岐されれば，Julia 集合は同相に変化し，その上の力学系に共役写像が構成できる．

すなわち，f は近傍の特定の集合において J-安定性をもつ．(さらに f が多項式のとき，特定の放物的周期点を (2) に分岐させることができるならば，Goldberg-Milnor 予想（1993，多項式の放物鉢の摂動に関する予想）に対し，部分的ではあるが肯定的な解答を与えることがわかる．

一方，(3) のように分岐する放物的周期点がある場合はやや複雑である．このとき Julia 集合の位相は大きく変化するが，最良ともいえる半共役が構成できる：

定理　(3) に分岐される放物的周期点がある場合，摂動後の Julia 集合からもとの Julia 集合への，力学系の作用を保存する全射連続写像（半共役写像）が構成できる．さらに，この写像は高々可算個の点を除いて単射である．

Julia 集合は非可算集合であることが知られているので，この半共役写像は「ほとんど同相写像」である．すなわち，摂動による Julia 集合の位相的変化を修正し，かつ力学系の作用も保存する写像が構成可能なのである．

3　第2章の概要

Lyubich-Minsky は Klein 群における 3 次元双曲多様体のアナロジーとして，**複素力学系に付随する 3 次元双曲ラミネーション**を構成した．しかしその積層構造の詳細は，限られた例を除きほとんど知られていなかった．例えば 2 次多項式が吸引的不動点を持つ場合，その構造は Sullivan の 2-Solenoid と呼ばれる Riemann 面ラミネーションを 3 次元的に拡張したものになることが知られている．これが重複度 2 の放物的不動点をもつ 2 次多項式へと退化するとき，最も簡単なラミネーションの構造変化が期待されるのだが，この場合すら詳細は知られてなかった．

この問題に対しては，まず 3 次元ラミネーション構成において本質的な役割をはたす 2 次元ラミネーション，**正則葉空間** (regular leaf space) の構造決定が先決である．著者は論文 [1] において (1) 充填 Julia 集合の内部を可算個の等角同型なタイルに分割して (**tessellation**) そのダイナミクスを追い，(2) 退化を実現する 2 次多項式間の半共役写像を具体的に構成，さらに (3) 付随するラミネーション間の半共役写像に持ち上げる，という独自の方法により，正則葉空間のラミネーションの退化を明解に記述した．結果として，ラミネーションの大局的積層構造は変化せず，各葉の構造が葉としての弧状連結性を保ったまま変化していることがわかった．この方法はその他の 2 次多項式にも威力を発揮し，Lyubich-Minsky が掲げたいくつかの正則葉空間の構造決定問題に対しても解答を与える．次の第 2 章では，重複度が一般の $q+1$ である放物的不動点，さらにはそれが分岐することで生成される周期 q の吸引的周期点をもつ 2 次多項式に付随する正則葉空間の構造まで記述した．

4　第2章の主定理

互いに素な自然数 p, q を任意にとってくる．このとき，固有値 $\omega := e^{2\pi i p/q}$ の放物的固定点をもつ 2 次多項式で，$g(z) = z^2 + \sigma$ の形のものがただ一つ定まる．同様に，ある $r \in (0,1)$ に対し，固有値 $\lambda = r\omega$ の吸引的固定点をもつ 2 次多項式で， $f(z) = z^2 + c$ の形のものがただ一つ定まる．ここで $r \to 1$ とすると，f は g に球面距離に関して一様収束し，g の放物的固定点（β とおく）は f の吸引的固定点（α とおく）の周期 q の反発的周期系（Γ とおく）とが退化した，重複度 $q+1$ の固定点と考えられる．

その退化の様子は，以下のように記述できる：

定理　α と Γ の各点を結ぶ q 本の弧で，その和集合 I が f で固定されるものが存在する．さらに $I_f = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(I)$，$I_g = \bigcup_{n\geq 0} g^{-n}(\beta)$ とおくと，Riemann 球面 $\bar{\mathbb{C}}$ 上 f から g への半共役 H が存在して，

- $H : \bar{\mathbb{C}} - I_f \to \bar{\mathbb{C}} - I_g$ は $f|_{\bar{\mathbb{C}}-I_f}$ と $g|_{\bar{\mathbb{C}}-I_g}$ の位相共役写像であり，
- H は I_f の各連結成分（この場合 I と同相）を I_g の各連結成分（この場合 1 点）の上に写す．

証明では，充填 Julia 集合の内部を力学系的に自然な方法でタイル分割し，その退化を見る方法がカギとなる．充填 Julia 集合の外側では Douady-Hubbard による外射線を利用した力学系の記述が有効だが，このタイル分割はその内側について同様に有効な力学系の記述方法を与える．

さて次に，f と g に付随する正則葉空間の構造を考える．まず，f に対し力学系の後方軌道全体の空間（自然拡大，natural extension と呼ばれる）を

$$\mathcal{N}_f := \{\hat{z} = (z_0, z_{-1}, \ldots) : \ z_0 \in \bar{\mathbb{C}},\ f(z_{-n-1}) = z_{-n}\}$$

と定める．この上には f の自然な持ち上げ $\hat{f}(\hat{z}) := (f(z_0), z_0, z_{-1}, \ldots)$ が定まり，特に $\hat{f} : \mathcal{N}_f \to \mathcal{N}_f$ は同相写像となる．さらに $\hat{\alpha} = (\alpha, \alpha, \ldots)$, $\hat{\infty} = (\infty, \infty, \ldots)$ とおけば，$\mathcal{R}_f = \mathcal{N}_f - \{\hat{\alpha}, \hat{\infty}\}$ は解析的に性質がよく，Riemann 面ラミネーションとなる．これが正則葉空間である．同様に $\mathcal{N}_g$, $\hat{g}$, π_g, $\hat{\beta}$ を定義すると，g の正則葉空間も $\mathcal{R}_g = \mathcal{N}_g - \{\hat{\beta}, \hat{\infty}\}$ で定義でき，やはり Riemann 面ラミネーションである．これら $\mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_g$ の各弧状連結成分（これを葉と呼ぶ）は複素平面 $\mathbb{C}$ と同型になり，$\hat{f}$, $\hat{g}$ はそれぞれ各葉に対し同型写像，特に Affine 写像として作用する．

さて $\pi_f(\hat{z}) = z_0$, $\mathcal{I}_f = \pi_f^{-1}(I_f)$ と定義し，また $\mathcal{I}_g$ も同様に定義すると，次のことが示される：

定理 f から g への半共役 H の自然な持ち上げとして $\hat{f}$ から $\hat{g}$ への半共役 $\hat{H} : \mathcal{N}_f \to \mathcal{N}_g$ が定まり，

- $\hat{H} : \mathcal{N}_f - \mathcal{I}_f \to \mathcal{N}_g - \mathcal{I}_g$ は $\hat{f}|_{\mathcal{N}_f - \mathcal{I}_f}$ から $\hat{g}|_{\mathcal{N}_g - \mathcal{I}_g}$ への位相共役.
- $\hat{H}$ は $\mathcal{I}_f$ の各弧状連結成分 (I と同相になる) を $\mathcal{I}_g$ の弧状連結成分（1 点になる）の上に写す.

さらに，この半共役は $\mathcal{I}_f$ を $\mathcal{I}_g$ にピンチするが，正則葉空間の各葉の弧状連結性は保存することがわかるので，$\mathcal{R}_f$ と $\mathcal{R}_g$ のラミネーションとしての積層構造は保たれることがわかる．本質的な違いが生じるのは，反発的周期系 Γ に由来する q 枚の葉（$\hat{f}$ による周期系をなす）が，放物的固定点 β の q 枚の反発花弁に対応する葉（これも $\hat{g}$ による周期系をなす）へと退化する部分であるが，その詳細も $\hat{H}$ の作用によって完全に記述可能である．

さらに，g の放物的固定点 β が 周期 q の吸引的周期系 A と 1 つの反発的固定点 γ をもつ 2 次多項式に分岐する場合に関しても，最初に A の各点と γ を結ぶ弧をうまくとり，タイル分割を定義することにより，上と同様の議論が可能である．

参考文献

[1] T. Kawahira. On the regular leaf space of the cauliflower. *preprint*, 2002.

[2] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **47**(1997) 17–94.

[3] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps. *Comm. Math. Helv.* **75**(2000), no.4, 535–593

[4] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures.* vieweg, 1999.