論文審査の結果の要旨

氏 名　川 平 友 規

論文提出者，川平 友規氏は，１次元複素力学系に関し，放物型周期点を持つ系に摂動を加えた場合の分岐の様子を研究し，分岐前と分岐後の系の定性的変化（ジュリア集合の位相的構造など）やそれらの間の半共役に関する結果を得た．

複素力学系の研究においては，非常に簡単な有理関数のリーマン球面の上への作用から驚くほど複雑で多様なジュリア集合が現れる．また，系のパラメータを変化させた場合にジュリア集合の構造やその他の力学系性質が急激に変化することがよくある．その最も顕著な例が放物型周期点（周期点であって，そこでの微分（乗数）が１のべき根になるもの）を持つ場合で，そこではパラメータを変化させた場合にジュリア集合が（コンパクト集合の間に定義された）ハウスドルフ距離に関して不連続に変化することが知られている．逆に，Mañé-Sad-Sullivan の結果によれば，このような放物型分岐を起こすパラメータの集合は，ジュリア集合が不連続に変化するパラメータ集合の中で稠密である．　複素力学系の放物型分岐については数多くの研究があるが，例えば McMullen は放物型周期点を持つ系がさらに幾何学的有限（クライン群の理論との類似）という条件を持つ場合に，有理関数列がこの系にある条件を満たす近づき方（乗数についていえば単位円に接しない近づき方，これを円接的収束という）で近づければ，列に沿ったジュリア集合が極限のジュリア集合に収束すること，すなわちこのような列に沿ってはジュリア集合が連続になること，同時にジュリア集合のハウスドルフ次元も連続になることを示している．　また，複素力学系に関し，クライン群の理論との類似を主張する「Sullivan の辞書」のアイデアを推し進めるために，Lyubich と Minsky は複素力学系に付随したラミネーションの概念を提唱した．この研究はまだ始まったばかりであり，非常によい性質を持つ双曲型の系についての研究がいくつかあるが，そのほかの場合には未解決の問題が多く，例えば放物型不動点を持つ場合のラミネーションの構造などはわかっていなかった．

論文提出者，川平 友規氏は，上記の McMullen の複素力学系の円接的摂動に関する論文を読み，そこに現れる分岐現象やそれを統御する技術について研究を始めた．McMullen の結果ではジュリア集合のハウスドルフ距離に関する収束やハウスドルフ次元に関する連続性について取り扱っているが，位相的構造の変化などについては議論していない．実際には円接的な摂動に限ってもジュリア集合は同相に変化するのではなく，摂動後の系から元の系への位相共役が存在しない場合もある．しかし川平氏はある条件の下にこれが半共役（他対１写像によ

る「共役」）にはできることを示した．以下にその主張をもう少し詳しく述べる．

リーマン球面上の次数 $d > 1$ の有理写像 f を固定する． f が幾何学的有限であるとは，ジュリア集合に含まれる特異点（分岐点）が全て前周期的であることをいう．このとき f の安定領域内の点は吸引または放物的周期点に収束し，無理的回転領域はもたない．この f に対し，ジュリア集合上の力学系をあまり大きく変えないような摂動として定義されたのが McMullen の円接的摂動 (horocyclic perturbation) である．これは放物的周期点に対し，分岐した周期点の配置がある種の対称性を保ち，かつそれぞれの微分（乗数）が無理的回転を示唆する固有値方向へ変化しないような摂動として定義される．円接的摂動のもと，放物的周期点の重複度を $n+1$ とした場合，その分岐の可能性は (1)1 個の放物周期点のまま（重複度 $n+1$ ），(2)1 個の反発周期点と n 個の吸引周期点， (3)1 個の吸引周期点と n 個の反発周期点，の３通りに絞られる．

次に，ジュリア集合上の特異点の分岐を制御する．ある点の f による逆像は重複度をこめて一般に d 個あるが，その重複した点が特異点である．これも摂動により分岐し得るため，特異点軌道の変化は力学系変化の大きな要因となる．ここではジュリア集合上の特異点についてのみ，軌道の重複度および前周期性が摂動において保存されることを仮定する．

さて以上のもと，論文提出者は次の定理を示した：

定理．幾何学的有限な f に上のような摂動を施す．このとき，放物的周期点が全て *(1)* か *(2)* に分岐されれば，ジュリア集合は同相に変化し，その上の力学系に共役写像が構成できる．

すなわち， f は円接的な摂動に沿っては J-安定性をもつ．(さらに f が多項式のとき，特定の放物的周期点を (2) に分岐させることができるならば，Goldberg-Milnor 予想（1993，多項式の放物鉢の摂動に関する予想）に対し，部分的ではあるが肯定的な解答を与えることがわかる．

一方，(3) のように分岐する放物的周期点がある場合はやや複雑である．このときジュリア集合の位相は大きく変化するが，最良ともいえる半共役を構成した：

定理．*(3)* に分岐される放物的周期点がある場合，摂動後のジュリア集合からもとのジュリア集合への，力学系の作用を保存する全射連続写像（半共役写像）が構成できる．さらに，この写像は高々可算個の点を除いて単射であり，その単射性が崩れる点は放物型周期点とその逆軌道である．

Lyubich-Minsky はクライン群における 3 次元双曲多様体のアナロジーとして，複素力学系に付随する 3 次元双曲ラミネーションを構成

した．しかしその積層構造の詳細は，限られた例を除きほとんど知られていなかった．例えば2次多項式が吸引的不動点を持つ場合，その構造はSullivanの2-Solenoidと呼ばれるリーマン面ラミネーションを3次元的に拡張したものになることが知られている．これが重複度2の放物的不動点をもつ2次多項式へと退化するとき，最も簡単なラミネーションの構造変化が期待されるのだが，この場合すら詳細は知られてなかった．

この問題に対しては，まず3次元ラミネーション構成において本質的な役割をはたす2次元ラミネーション，正則葉空間(regular leaf space)の構造決定が先決である．論文提出者は(1)充填Julia集合の内部を可算個の等角同型なタイルに分割して(**tessellation**)そのダイナミクスを追い，(2)退化を実現する2次多項式間の半共役写像を具体的に構成，さらに(3)付随するラミネーション間の半共役写像に持ち上げる，という独自の方法により，正則葉空間のラミネーションの退化を明解に記述した．結果として，ラミネーションの大局的積層構造は変化せず，各葉の構造が葉としての弧状連結性を保ったまま変化していることがわかった．この方法はその他の2次多項式にも威力を発揮し，Lyubich-Minskyが掲げたいくつかの正則葉空間の構造決定問題に対しても解答を与える．次の第2章では，重複度が一般の$q+1$である放物的不動点，さらにはそれが分岐することで生成される周期qの吸引的周期点をもつ2次多項式に付随する正則葉空間の構造まで記述した．

以上の結果は，放物型周期点を持つ複素力学系の分岐の様子を詳細に記述するものであり，この分野の研究において重要な位置を占めると思われる．よって論文提出者、川平 友規氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．