論文の内容の要旨

論文題目　The effective surjectivity of mod l Galois representations of 1- and 2-dimensional abelian varieties with trivial endomorphism ring

（和訳　自明な自己準同型環を持つ１次元と２次元のアーベル多様体上の法 l ガロア表現のエフェクティブな全射性）

氏　名　河村　隆

A を代数体 K 上の n 次元主偏極アーベル多様体とする。素数 l について、A_l を A の l 等分点のなす群とする。$\bar{K}$ を K の代数的閉包とすると、$G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の A_l 上のガロア表現 $\rho_l\colon\ G_K \to GSp_{2n}(\mathbf{F}_l)$ が得られる。ここで $GSp_{2n}(\mathbf{F}_l)$ は $\mathbf{F}_l$ を成分とする $2n$ 次元シンプレクティック相似変換の群である。

Serre は、n が２、６または奇数で、$\mathrm{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbf{Z}$ のとき、十分大きな l について ρ_l が全射になることを示した。証明は Faltings の定理と代数群の標準的な定理を用いる。結果は一般的であるが、$l > l_0$ ならば ρ_l が全射になるような l_0 のエフェクティブな下界を与えなかった。

この論文の目的は、n が１または２のときに、ρ_l の全射性のより簡潔な証明と、l_0 のエフェクティブな評価を与えることである。証明は、第一に Masser と Wüstholz によるアーベル多様体間の同種写像の次数の評価、およびそれより導かれる Faltings の定理のエフェクティブな精密化を用いる。第二に、Aschbacher と Kleidman と Liebeck による有限古典群の極大部分群の分類に関する詳細な結果、特に $GSp_2(\mathbf{F}_l) \cong GL_2(\mathbf{F}_l)$ と $GSp_4(\mathbf{F}_l)$ のそれを用いる。つまり、$l > l_0$ のとき ρ_l の像が $GL_2(\mathbf{F}_l)$ や $GSp_4(\mathbf{F}_l)$ の極大部分群に含まれると仮定すると、Masser と Wüstholz の定理に矛盾することを導くことで、ρ_l の全射性を示す。

主定理は次の2つである。ここで$D(K)$はKの判別式で、$h(A)$はAのFaltings高さで、体の拡大により不変である。

主定理1　$A=E$を次数dの代数体K上の楕円曲線とし、$\mathrm{End}_{\bar{K}}(E)=\mathbf{Z}$とする。$l>\max(|D(K)|,\ C(1)[\max\{48d,\ h(E)\}]^{\tau(1)})$ならば、$\rho_l(G_K)=GL_2(\mathbf{F}_l)$である。ここで、$C(1)$と$\tau(1)$はMasserとWüstholzによるFaltingsの定理の精密化に現れる定数で、$\tau(1)=2^{285}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 136!\times(2^{276}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 136!+1)^7+2^{1073}\cdot 3\cdot 17\cdot 31^2\cdot 41\cdot 528!\times(2^{1061}\cdot 17\cdot 31\cdot 528!+1)^{15}<10^{25000}$である。

主定理2　Aを次数dの代数体K上の2次元主偏極アーベル多様体とし、$\mathrm{End}_{\bar{K}}(A)=\mathbf{Z}$とする。$l>\max(|D(K)|,\ C(2)[\max\{3840d,\ h(A)\}]^{\tau(2)})$ならば、$\rho_l(G_K)=GSp_4(\mathbf{F}_l)$である。ここで、$C(2)$と$\tau(2)$はMasserとWüstholzによるFaltingsの定理の精密化に現れる定数で、$\tau(2)=2^{1074}\cdot 17\cdot 31^2\cdot 528!\times(2^{1061}\cdot 17\cdot 31\cdot 528!+1)^{15}+2^{4183}\cdot 3^6\cdot 7^3\cdot 11\cdot 23\cdot 2080!\times(2^{4166}\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 2080!+1)^{31}<10^{240000}$である。

$GL_2(\mathbf{F}_l)$と$GSp_4(\mathbf{F}_l)$の極大部分群は次の2つの命題で与えられる。

命題1　lが5以上のとき、$GL_2(\mathbf{F}_l)$の極大部分群は以下の5個の部分群のいずれかと共役である。
(1) $SL_2(\mathbf{F}_l)\rtimes(\langle\delta_1\rangle$の極大部分群$)$
(2) Borel部分群
(3) 分裂Cartan部分群の正規化群$\cong(\mathbf{F}_l{}^*\times\mathbf{F}_l{}^*)\rtimes S_2$
(4) 非分裂Cartan部分群の正規化群$\cong\mathbf{F}_{l^2}{}^*\bullet\mathbf{Z}_2$
(5) $Q_8\bullet D_6\rtimes\langle\delta_1\rangle\cong GL_2(\mathbf{F}_3)\rtimes\langle\delta_1\rangle$
ここで、μを$\mathbf{F}_l{}^*$の生成元とすると、δ_1は$\mathbf{F}_l{}^2$の基底に関して$\mathrm{diag}(\mu,\ 1)$と表される元である。群GとHについて、$G\bullet H$はGのHによる拡大を表す。$\mathbf{Z}_2$は位数2の巡回群で、Q_8は四元数群で、D_nは位数nの二面体群である。

命題2　lが3以上のとき、$GSp_4(\mathbf{F}_l)$の極大部分群は以下の7個の部分群のいずれかと共役である。
(1) $Sp_4(\mathbf{F}_l)\rtimes(\langle\delta_2\rangle$の極大部分群$)$
(2) 極大放物型部分群
(3) $(SL_2(\mathbf{F}_l)\times SL_2(\mathbf{F}_l))\rtimes S_2\rtimes\langle\delta_2\rangle$
(4) $GL_2(\mathbf{F}_l)\bullet\mathbf{Z}_2\rtimes\langle\delta_2\rangle$
(5) $SL_2(\mathbf{F}_{l^2})\rtimes\langle\delta_2\rangle$
(6) $GU_2(\mathbf{F}_{l^2})\rtimes\langle\delta_2\rangle$
(7) $D_8\circ Q_8\bullet O_4{}^-(\mathbf{F}_2)\rtimes\langle\delta_2\rangle$
ここで、δ_2は$\mathbf{F}_l{}^4$のシンプレクティック基底に関して$\mathrm{diag}(\mu,\ \mu,\ 1,\ 1)$と

表される元である。$\circ$ は中心積を表し、$O_4{}^-$ は Witt 欠損 1 の 4 次の直交群である。

Masser と Wüstholz は数体上のアーベル多様体間の同種写像の次数をエフェクティブに評価した。

定理 2　自然数 n と d が与えられたとき、n にしか依存しない定数 $\kappa(n)$ と $C(n)$ が存在して以下の性質を満たす。K を次数 d の数体とし、A と A' を K 上定義された n 次元のアーベル多様体とする。もしそれらが K 上同種ならば、A から A' へ次数が高々 $C(n)[\max\{d,\ h(A)\}]^{\kappa(n)}$ の K 同種写像が存在する。

彼らは定理 2 を用いて Faltings の定理を次のようにエフェクティブに精密化した。

定理 3 の系　自然数 n と d が与えられたとき、n にしか依存しない定数 $\tau(n)$ と $C(n)$ が存在して以下の性質を満たす。K を次数 d の数体とし、A を K 上定義された n 次元のアーベル多様体とする。そのときある自然数 $M \leq C(n)[\max\{d,\ h(A)\}]^{\tau(n)}$ が存在して、M を割らない任意の素数 l について、 自然な写像 $\mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_l \to \mathrm{End}_{G_K}(A_l)$ は同型になる。

ここで、$\tau(n) = n^2\{\lambda(8n)+3\kappa(2n)\}$、$\lambda(n) = 16n^3(2n-1)k(n)\{2nk(n)+1\}^{n-1}$、$k(n) = (2n^2+n-1)4^{n(2n+1)}\{n(2n+1)\}!$、$\kappa(n) = 10n^3\lambda(8n) + 32n^2\mu(8n)$、$\mu(n) = \lambda(n)/(4n)$ である。

ζ_l を 1 の原始 l 乗根とする。もし $K \cap \mathbf{Q}(\zeta_l) = \mathbf{Q}$ ならば、円分指標 ε_l は全射になる。l についての条件は次の補題で与えられる。

補題　$l > |D(K)|$ ならば、$K \cap \mathbf{Q}(\zeta_l) = \mathbf{Q}$ である。

（主定理 1 の証明）　$G_l := \rho_l(G_K)$ が命題 1 の $GL_2(\mathbf{F}_l)$ のどの極大部分群にも含まれないことを示す。

$l > |D(K)|$ だから、ε_l は補題により全射になる。よって $G_l \not\subset SL_2(\mathbf{F}_l) \rtimes$ ($\langle\delta_1\rangle$ の極大部分群) である。

Borel 部分群は $V_1 := \mathbf{F}_l{}^2$ の 1 次元部分空間 W を保つ。もし G_l がそれに含まれると、次数 l の K 同種写像 $f:\ E/W \to E/V_1 \cong E$ が存在する。定理 2 により、次数が高々 $C(1)[\max\{d, h(E)\}]^{\kappa(1)}$ の K 同種写像 $g:\ E \to E/W$ が存在し、その次数を d_0 とする。合成 K 同種写像 $g \circ f$ の次数は $d_0 l$ である。一方 $\mathrm{End}_{\bar{K}}(E) = \mathbf{Z}$ だから、$\mathrm{End}_K(E/W) = \mathbf{Z}$ である。よって $d_0 l$ はある自然数 m の平方である。だから l は m を割り、l は d_0 を割り、$l > d_0$ に矛盾する。

次にもし $G_l \subset (\mathbf{F}_l{}^* \times \mathbf{F}_l{}^*) \rtimes S_2$ ならば、G_l から S_2 にある準同型 φ_1 が存在する。L_1 を $\bar{K}^{\ker(\varphi_1 \circ \rho_l)}$ とすると、$[L_1 : K] \leq 2$ で、$\rho_l(G_{L_1} := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L_1)) \subset \mathbf{F}_l{}^* \times \mathbf{F}_l{}^*$ である。故に $\mathrm{End}_{G_{L_1}}(E_l) \supset \mathbf{F}_l{}^2$ である。一方

$l > C(1)[\max\{2d, h(E)\}]^{\tau(1)}$ だから、定理３の系により、$\mathrm{End}_{G_{L_1}}(E_l) \cong \mathrm{End}_{L_1}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_l \cong \mathbf{F}_l$ である。これは矛盾である。

もし $G_l \subset \mathbf{F}_{l^2}{}^* \bullet \mathbf{Z}_2$ ならば、K のある二次拡大体 L_2 で、$\rho_l(G_{L_2} := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L_2)) \subset \mathbf{F}_{l^2}{}^*$ となるものが存在する。故に $\mathrm{End}_{G_{L_2}}(E_l) \supset \mathbf{F}_{l^2}$ である。一方 $l > C(1)[\max\{2d, h(E)\}]^{\tau(1)}$ だから、系により $\mathrm{End}_{G_{L_2}}(E_l) \cong \mathrm{End}_{L_2}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_l \cong \mathbf{F}_l$ である。よって矛盾する。

最後に $G_l \subset GL_2(\mathbf{F}_3) \rtimes \langle \delta_1 \rangle$ とする。補題により ε_l は全射だから、$G_l \supset \langle \delta_1 \rangle$ である。L_3 を $\bar{K}^{(\rho_l)^{-1}(\langle \delta_1 \rangle)}$ とすると、$[L_3 : K] \leq |GL_2(\mathbf{F}_3)| = 48$ で、$\rho_l(G_{L_3} := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L_3)) = \langle \delta_1 \rangle$ である。よって $\mathrm{End}_{G_{L_3}}(E_l) \supset \mathbf{F}_l{}^2$ である。一方 $l > C(1)[\max\{48d,\ h(E)\}]^{\tau(1)}$ だから、系により $\mathrm{End}_{G_{L_3}}(E_l) \cong \mathrm{End}_{L_3}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_l \cong \mathbf{F}_l$ である。これは矛盾である。以上で主定理１の証明が完成される。

（主定理２の証明）　G_l が命題２の $GSp_4(\mathbf{F}_l)$ のどの極大部分群にも含まれないことを示す。

ε_l は全射だから、$G_l \not\subset Sp_4(\mathbf{F}_l) \rtimes$ ($\langle \delta_2 \rangle$ の極大部分群) である。

極大放物型部分群は $V_2 := \mathbf{F}_l{}^4$ の１次元か２次元の部分空間を保つ。だから主定理１の Borel 部分群の場合と同様に、G_l は極大放物型部分群に含まれない。

次にもし $G_l \subset (SL_2(\mathbf{F}_l) \times SL_2(\mathbf{F}_l)) \rtimes S_2 \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ ならば、G_l から S_2 にある準同型 φ_2 が存在する。L_4 を $\bar{K}^{\ker(\varphi_2 \circ \rho_l)}$ とすると、$[L_4 : K] \leq 2$ で、$\rho_l(G_{L_4} := \mathrm{Gal}(\bar{K}/L_4)) \subset (SL_2(\mathbf{F}_l) \times SL_2(\mathbf{F}_l)) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ である。$(SL_2(\mathbf{F}_l) \times SL_2(\mathbf{F}_l)) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ は V_2 の２次元部分空間を保つから、主定理１の Borel 部分群の場合と同様に矛盾が生じる。

$GL_2(\mathbf{F}_l) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ は V_2 の２次元部分空間を保つから、$(SL_2(\mathbf{F}_l) \times SL_2(\mathbf{F}_l)) \rtimes S_2 \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ の場合と同様に、$G_l \not\subset GL_2(\mathbf{F}_l) \bullet \mathbf{Z}_2 \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ である。

もし $G_l \subset SL_2(\mathbf{F}_{l^2}) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ または $G_l \subset GU_2(\mathbf{F}_{l^2}) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ ならば、G_l は $\mathbf{F}_{l^2}$ と可換である。一方 $l > C(2)[\max\{d, h(A)\}]^{\tau(2)}$ だから、系により $\mathrm{End}_{G_K}(A_l) \cong \mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_l \cong \mathbf{F}_l$ である。よって矛盾する。

主定理１の $GL_2(\mathbf{F}_3) \rtimes \langle \delta_1 \rangle$ の場合と同様に $G_l \not\subset D_8 \circ Q_8 \bullet O_4{}^-(\mathbf{F}_2) \rtimes \langle \delta_2 \rangle$ である。ここで $|D_8 \circ Q_8 \bullet O_4{}^-(\mathbf{F}_2)| = 3840$ であることより、主定理２の証明が完成される。