論文審査の結果の要旨

氏　名　河　村　　隆

論文題目：The effective surjectivity of mod l Galois representations of 1- and 2-dimensional abelian varieties

(自明な自己準同型環をもつ１次元と２次元のアーベル多様体上の法 l ガロア表現のエフェクティブな全射性)

代数体 K 上定義されたアーベル多様体 A に対してその等分点への K の絶対ガロア群 $G_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用を考えて，各素数 l に対して l-進表現を初めて定義したのは谷山豊である．５０年ほど前のことである．それ以来このガロア表現は整数論の基本的な道具となってきた．

多くの研究者によってこの l-進表現は研究されたが，とりわけ G_K の像を詳しく調べたのは Jean-Pierre Serre である．

彼の得た大きな成果の一つは次のようなものである．A を有限次代数体 K 上の n 次元主偏極アーベル多様体とする．素数 l について、A_l を A の l 等分点のなす群とするとき，A_l 上のガロア表現 $\rho_l:\ G_K \to GSp_{2n}(\mathbf{F}_l)$ が得る．ここで $GSp_{2n}(\mathbf{F}_l)$ は $\mathbf{F}_l$ を成分とする $2n$ 次元シンプレクティック相似変換の群とする．

Serre は n が２，６または奇数で，$\mathrm{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbf{Z}$ のとき，十分大きな l について ρ_l が全射になることを示した．この結果は一般的であるが，$l > l_0$ ならば ρ_l が全射になるような l_0 の実効的な (effective) 下界を与えていない点で不満が残る．論文提出者は，この「実効的な下界を与える」という問題に取り組んだ．

提出論文の主結果は，n が１または２のときに、ρ_l の全射性のより初等的な証明によって l_0 の実効的な評価を与えることにある．

証明は、第一に Masser と Wüstholz によるアーベル多様体間の同種写像の次数の評価 (これは Faltings の定理の実効的な精密化と言ってよいが) を用いる．第二に、Aschbacher と Kleidman と Liebeck による有限古典群の極大部分群の分類に関する詳細な結果，特に $GSp_2(\mathbf{F}_l) \cong GL_2(\mathbf{F}_l)$ と $GSp_4(\mathbf{F}_l)$ のそれを用いる．即ち背理法により $l > l_0$ のとき ρ_l の像が $GL_2(\mathbf{F}_l)$ や $GSp_4(\mathbf{F}_l)$ の極大部分群に含まれると仮定すると，Masser と Wüstholz の定理に矛盾することを導く．

主結果は次の２つである．以下で $D(K)$ は K の判別式とし，$h(A)$ は A の Faltings 高さとする．これは体の拡大により不変であることに注意する．

主定理１　E を次数 d の代数体 K 上定義された楕円曲線とし，$\mathrm{End}_{\bar{K}}(E) = \mathbf{Z}$ と仮定する．このとき $l > \max(|D(K)|,\ C(1)[\max\{48d,\ h(E)\}]^{\tau(1)})$ ならば，$\rho_l(G_K) = GL_2(\mathbf{F}_l)$ である．ここで，$C(1)$ と $\tau(1)$ は Masser と Wüstholz による Faltings の定理の精密化に現れる定数で，

$$\begin{aligned}\tau(1) &= 2^{285}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 136!\times(2^{276}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 136!+1)^7\\ &\quad +2^{1073}\cdot 3\cdot 17\cdot 31^2\cdot 41\cdot 528!\times(2^{1061}\cdot 17\cdot 31\cdot 528!+1)^{15}\\ &< 10^{25000}\end{aligned}$$

である．

主定理２　A を次数 d の代数体 K 上の２次元主偏極アーベル多様体とし，$\mathrm{End}_{\bar{K}}(A) = \mathbf{Z}$ と仮定する．すると

$$l > \max(|D(K)|,\ C(2)[\max\{3840d,\ h(A)\}]^{\tau(2)})$$

ならば、$\rho_l(G_K) = GSp_4(\mathbf{F}_l)$ である．ただしここで，$C(2)$ と $\tau(2)$ は Masser と Wüstholz による Faltings の定理の精密化に現れる定数で，

$$\begin{aligned}\tau(2) &= 2^{1074} \cdot 17 \cdot 31^2 \cdot 528! \times (2^{1061} \cdot 17 \cdot 31 \cdot 528! + 1)^{15} \\ &\quad + 2^{4183} \cdot 3^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2080! \times (2^{4166} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2080! + 1)^{31} \\ &< 10^{240000}\end{aligned}$$

である．

ここまでが提出論文の主結果である．さらに論文提出者は $C(1)$ の計算を試みたが，事情によりこれは論文の一部としなかったが，将来この方面の研究も望ましい．

2次元アーベル多様体を取り扱う定理2は新しい結果で，証明の手法もさらに高次元の結果を得るための手掛りとも成り得る．古くからの重要な問題に貴重な新しい寄与をなした当研究は，賞賛に値し，今後さらなる進展が期待される．

よって，論文提出者 河村隆 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．