論文の内容の要旨

論文題目： On $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds with Fano Index ≥ 2
(Fano 指数 ≥ 2 の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体について)

氏　　名： 鈴木　香織

本論文の目的はピカール数が 1 で $\mathbb{Q}$-分解的な 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の分類についての考察を行うことである．また，log del Pezzo 曲面のカスケードと呼ばれる反射影の列を用いた例の構成を行う．その応用として，与えられた Fano 指数が 2 であって重み付き射影空間に低い余次元で埋め込まれる 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体から高い余次元で埋め込まれる 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体へのカスケードが構成できる．

定義. $\mathbb{Q}$- Fano 多様体とは，正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 射影多様体で高々末端特異点のみを持ち，かつ反標準因子が豊富となるものである．このような Fano 多様体 X に対し Fano 指数を線形同値 $-K_X = fA$ を満たす Weil 因子 A が存在する最大の正整数で定義する．

非特異 Fano 多様体の分類は 1980 年代までに Iskovskikh, Mori, Mukai らによって完全になされている．他方，MMP（Mori Minimal Model Programme) においては $\mathbb{Q}$-分解的な端末特異点を持つ多様体を扱うことが不可欠である．従って，このような特異点を持つ 3 次元 Fano 多様体の分類が次の重要な問題となる．

3 次元多様体の分類に用いられる手法は筆者の知る限り大きく分けて三つある．一つは MMP の手法，二番目は Mukai 独自の手法で，これにより，非分解的な Fano 指数 1 の場合の分類が完成した．三番目が次数環を用いた Reid, Corti らによる手法である．

Fano 多様体の幾何学的な構造は，Fano 指数によって大きく異なる．Fano 指数が 1 という条件は，特に MMP を分類の手法とした場合には自然な流れではあるが，その分類は一般的には未解決であり，現在も活発に研究が進められている．一方，次数環を用いた手法では指数の値に関わらず Fano 多様体の構造が理解できるという利点がある．そこで本論文では上記の次数環を用いた手法で Fano 指数が 2 以上の $\mathbb{Q}$-Fano 多様体を取り扱う．

Fano 指数が大きくなることを用いて反標準因子 $-K_X$ ではなく，比較的シンプルな A に付随する次数環を用いて $\mathbb{Q}$-Fano 多様体を多項式環の言葉で書き表すことができる．その Hilbert 多項式を考えることにより具体的な有理多項式の計算から $\mathbb{Q}$-Fano 多様体について以下に述べる新たな知見を得た．

前半で示した定理は次の通りである．

定理 1. X を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とし，ピカール数を 1 とする．この時，X の Fano 指数 $f = f(X)$ について次が成立する．

(1) $\max f(X) = 19$, $f(\mathbb{P}(3,4,5,7)) = 19$.
(2) もし $f(X) = 19$ ならば, X の Hilbert 多項式は $\mathbb{P}(3,4,5,7)$ の Hilbert 多項式と一致し，その値は $1/(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^7)$ である．
(3) $f \in \{1, \ldots, 10, 11, 13, 17, 19\}$.

注意. (3) については $f = 10$ の場合を除いて全て存在が確認されている．

証明は次の [K] の定理を用い，Magma ([Ma]) というコンピュータープログラムを用いた計算によってなされる．

定理 2 (川又). X を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とし，ピカール数を 1 とする．
$\mathcal{E}$ で $\Omega_X^{1\ \vee\vee}$ を表わす，

(1) もし $\mathcal{E}$ が μ–半安定ならば, $(-K_X)^3 \leq 3(-K_X)c_2(X)$.
(2) もし $\mathcal{E}$ が μ–半安定でないならば, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ の maximal destabilizing sheaf, s を $\mathcal{F}$ の階数とし，t を $c_1(\mathcal{F}) \simeq tK_X$ を満たす正の有理数とする．この時次の不等式が成立：
  (a) $s = 1$ ならば, $(1-t)(1+3t)(-K_X)^3 \leq 4(-K_X)c_2(X)$.
  (b) $s = 2$ ならば, $t(4-3t)(-K_X)^3 \leq 4(-K_X)c_2(X)$.

注意. 実際の論文では具体的な数値は明示されていないが，証明を読むことで上のような表示を持つことがわかる．

更に $f \geq 9$ の場合に全ての特異点の組を basket の意味で記述し，その Hilbert 多項式及び反標準因子の三乗の値と共に明示した．$f \leq 8$ の場合も A に付随する次数環により得られる重み付き射影空間の埋め込みとしての余次元が 2 以下の場合についても同様のリストを作成した．また，次の結果を得た．

定理 3. X を $\mathbb{C}$ 上の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とし，ピカール数を 1 とする．更に重み付き射影空間の中の埋め込みとしての余次元が 3 となるものは次の通り：

(1) $f = 2$ ならば X は $\frac{1}{3}(2,1,2)$–型特異点を唯一持つ $\mathbb{Q}$-Fano 多様体であり, $-K_X^3 = 56/3$, X の Hilbert 多項式は $1 + 2t^2 - 2t^3 - t^5/(1-t)^3(1-t^3)$.
これは $\mathbb{P}(1^3, 2^2, 3)$ の coordinates $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z$ を用いた 5×5 *skew matrix*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & b_{14} & b_{15} \\ & x_3 & b_{24} & b_{25} \\ & & b_{34} & b_{35} \\ & & & z \end{pmatrix} \quad \text{of degrees} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix}.$$

の *Pfaffian* によって定義される 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の Hilbert 多項式と一致する．ここで各 b_{ij} は 2 次同次多項式 $S^{(2)}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ の元．

(2) $f \geq 3$ ならば重み付き射影空間の中の埋め込みとして考えた時の余次元が 3 となるものは存在しない．

注意. 上の *Pfaffian* は Buchsbaum–Eisenbud により定義されたものである．[BE]

後半では del Pezzo 曲面 T の $d \leq 8$ 点以下の blow up について考察を行い特に次の定理を示した．

定理 4. T を 商特異点 $\frac{1}{5}(2,4)$ を唯一つ持ち，$-K_T = \mathcal{O}_T(A)$ によって polarize される del Pezzo 曲面とする．$d \leq 6$ に対し，$\sigma\colon T^{(d)} \longrightarrow T$ を T の d 個の general points $P_1, \ldots, P_d$ における d 点 blow up とする．E_i で 各 P_i たちの例外曲線を表わす．このとき

(1) $T^{(d)}$ は $\frac{1}{5}(2,4)$-型 の特異点を唯一つ持つ log del Pezzo 曲面 であって $(-K_{T^{(d)}})^2 = 6 - d + \frac{2}{5}$.

(2) $d \leq 5$ ならば, $T^{(d)}$ の次数環は次数 1 が $7-d$ 個, 2 が 2 個, 3, 4, 5 が各 1 個ずつの計 $12-d$ 個の生成元を持ち，埋め込み $T^{(d)} \subset \mathbb{P}(1^{7-d}, 2^2, 3, 4, 5)$ を与える．これは例外曲線 E_i を 次の disjoint な射影的正規有理曲線に移す：

$$E_i \cong \mathbb{P}^1 \subset T^{(d)} \subset \mathbb{P}(1^{7-d}, 2^2, 3, 4, 5).$$

(3) $T^{(6)}$ の次数環は次数 $1,2,3,4,5$ 各 1 個を生成元として持ち，$T^{(6)}$ を完全交差 $T_{6,8} \subset \mathbb{P}(1,2,3,4,5)$ の形に埋め込む．この埋め込み写像は例外曲線 E_i を $T_{6,8}$ 内の disjoint な (-1)-curve に移す．

注意. $A^{(d)} = \sigma^* A - \sum E_i$ とする．この時，次数環 $R(T^{(d)}, A^{(d)}) \subset R(T^{(d-1)}, A^{(d-1)})$ は Type I 反射影によって与えられる．これは，次数 1 の生成元を新たに加えることで得られる．

同様に他の del Pezzo 曲面 T の blow up を考え，重み付き射影空間への埋め込みの余次元の高い del Pezzo 曲面から低い del Pezzo 曲面への射影による構成できる．今の定理で $T^{(6)}$ は余次元 2 の良く知られた構造をもち，これから出発することで，余次元の高い del Pezzo 曲面として $T, T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(5)}$ の構造の知見が可能になった．

得られた結果の応用として，Fano 指数が 2 の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体についても同様の結果を得ることができる．del Pezzo 曲面はその特異点 $\frac{1}{r}(a,b)$ 達が $a+1$ または $b+1 \simeq 1 \mod r$ かつ Hilbert 多項式の 1 次の項の係数が 1 以上の時に Fano 指数が 2 の 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体へ次数 1 の生成元を加えることで拡張可能である．

このような例として前述の余次元 3 の $\mathbb{Q}$-Fano 多様体が挙げられる．

定理 5. T として商特異点 $\frac{1}{3}(2,2)$ を唯一の特異点として持つ重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1,1,3)$ で，$-K_T = \mathcal{O}_T(A)$ によって polarize される del Pezzo 曲面とする．$d \leq 8$ に対し，$\sigma\colon T^{(d)} \longrightarrow T$ を T の d 個の general points $P_1, \ldots, P_d$ における d 点 blow up とする．E_i で 各 P_i たちの例外曲線を表わす．このとき

(1) $T^{(d)}$ は $\frac{1}{3}(2,2)$-型 の特異点を唯一持つ log del Pezzo 曲面 であって $(-K_{T^{(d)}})^2 = 1/3 + 8 - d$.

(2) $T^{(6)}$ の次数環は次数 1, 1, 1, 2, 2, 3 各 1 個を生成元として持ち, $T^{(6)}$ を Bucksbaum-Eisenbud *Pfaffian* を用いて $T_{\mathrm{Pf}} \subset \mathbb{P}(1^3, 2^2, 3)$ の形に埋め込む.

上の定理の $T^{(6)}$ の反射影として得られた 3 次元 $\mathbb{Q}$-Fano 多様体が定理 3 (1) で求めるものになっている.

謝辞 : Miles Reid 先生とは有意義な議論を交わし，また絶えず励ましの言葉を頂きました．ここに深く感謝いたします．Fano 多様体に関して助言を頂きました宮岡洋一先生，高木寛通さん，そして Magma のプログラミングを教えて下さった Gavin Brown さんに心より御礼申し上げます．最後に指導教官として温かく見守り，この論文に対し貴重な意見を下さいました小木曽啓示先生に感謝いたします.

参考文献

[BE] D. Buchsbaum, D. Eisenbud, *Algebra Structures for Finite Free Resolutions, and Some Structure Theorems for Ideals of Codimension 3*, Amer. J. Math. 99 (1977), 447–485

[K] Y. Kawamata, *Boundedness of $\mathbb{Q}$-Fano Threefolds*, Contemp. Math. 131 (1992), 439–445.

[Ma] Magma (John Cannon's computer algebra system): W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, J. Symb. Comp. 24 (1997) 235–265.