論文審査の結果の要旨

氏名　鈴木香織

$\mathbf{Q}$-分解的な末端特異点のみを許し、反標準因子が豊富かつ Picard 数が 1 である正規射影代数多様体を $\mathbf{Q}$-Fano 多様体という。3 次元 $\mathbf{Q}$-Fano 多様体は、森、川又、Reid らによって確立されたいわゆる 3 次元極小モデル理論 (森理論) において中心的な役割をはたす多様体の類の 1 つであり、その名の由来である Fano 以来多くの人によって様々な立場から研究されている多様体の類でもある。

さて、$\mathbf{Q}$-Fano 多様体に付随する基本的な不変量に、Gorenstein 指数 $r(X)$ と Fano 指数 $f(X)$ がある。前者は、X の反標準因子 $-K_X$ は何倍したら Cartier 因子になるかをあらわす最小の正整数であり、後者は $-K_X$ が数値的 Weil 因子類群 (X の Weil 因子全体のなす群を数値的同値類で割って得られる群) の中でどれだけ割れるかをあらわす最大の整数である。Fano 指数が $f(X)$ であれば、その定義から、$-K_X \equiv f(X)A_X$ となる Weil 因子 A_X-ここでは X の原始的 Weil 因子と呼ぶ-が数値的同値を除いて一意に決まる。

論文提出者鈴木香織は、3 次元 $\mathbf{Q}$-Fano 多様体を主にその Fano 指数と次数環の観点から研究した。より具体的には、次の定理 (博士論文における主定理) を得た。

定理. $\mathcal{F} := \{1, 2, \cdots, 9, 10, 11, 13, 17, 19\}$ とする。X を 3 次元 $\mathbf{Q}$-*Fano* 多様体、$f(X)$ を X の *Fano* 指数、A_X を X の原始的 *Weil* 因子とする。このとき、

(1) $f(X) \in \mathcal{F}$.

(2) 3 次元 $\mathbf{Q}$-*Fano* 多様体 $P := \mathbf{P}(3, 4, 5, 7)$ の *Fano* 指数は 19 である。更に $f(X) = 19$ ならば、(X, A_X) に付随する *Hilbert* 多項式と (P, A_P) に付随する *Hilbert* 多項式は一致する:

$$\sum_{n \geq 0} h^0(X, \mathcal{O}_X(nA_X))t^n = \frac{1}{(1-t)^3(1-t)^4(1-t)^5(1-t)^7}.$$

(3) 逆に $f \in \mathcal{F}$ かつ $f \neq 10$ である整数 f に対して、$f(X) = f$ である 3 次元 $\mathbf{Q}$-*Fano* 多様体 X が存在する。

この定理は、$\mathbf{Q}$-Fano 多様体の Fano 指数の有界性予想 (Batyrev の予想) の 3 次元版の肯定的解決であるのみならず、(2) で保証されるように最良の評価を与えたという点でも意義深くかつ決定的なものである。

証明は特異 Riemann-Roch の定理や川又氏による 3 次元 $\mathbf{Q}$-Fano 多様体の有界性定理とその証明方法といった伝統的手法とともに、最後の詰めにおいてはマグマとよばれる次数環の計算に関する computer program をも使う新鮮なものである。

このように、論文提出者鈴木香織は、代数幾何学における興味あるテーマに取り組み、よい成果をあげた。

よって、論文提出者鈴木香織は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。