論文の内容の要旨

論文題目

The Magnus Representation of the Mapping Class Group

写像類群のマグナス表現

氏名　　鈴木　正明　（すずき　まさあき）

境界を一つ持つ、向きづけられた曲面とその写像類群を考える。

古典的に知られているように Fox 微分と呼ばれる計算を用いて、いくつかの興味深い行列表現を自由群の自己同型群のある条件を満たす部分群に対して定義することができる。そのような表現を初めに紹介したのは Magnus（マグナス）なので、それらはマグナス表現と呼ばれる。例えば組みひも群が自由群の自己同型群の部分群とみなせることから、組みひも群に対して定義される Burau 表現や Gassner 表現がそのようにして得られる表現である。写像類群も自由群の自己同型群の部分群とみなせることが Nielsen の結果により知られているので、写像類群に対してもマグナス表現を定義することができる。この写像は写像類群から曲面の基本群の群環を係数とする一般線型群への写像である。行列のサイズは曲面の種数の２倍となる。しかしこの写像は準同型になっておらず、本当の意味での表現にはなっていない。この写像の定義域をトレリ群に制限し、係数をアーベル化し曲面の１次ホモロジー群の群環にすることによって、写像は準同型となり、本当の意味での表現を得る。この表現はトレリ群のマグナス表現と呼ばれる。ここでトレリ群とは写像類群の正規部分群で、曲面のホモロジー群への作用が自明である元の全体として定義されるものである。

２節では、Fox 微分の定義を確認し、いくつかの重要な性質を復習する。

３節では、その Fox 微分を用いた写像類群のマグナス表現の定義を述べる。さらにトレリ群のマグナス表現を導入する。

４節では、トレリ群のマグナス表現によって得られる行列の特性多項式を考え、その性

質をあげる。それらの性質は後の節で使われることになる。

５節では、トレリ群のマグナス表現が忠実であるかどうかを議論する。ある表現が忠実であるということは準同型が単射であるということである。Burau 表現の忠実性に関しては次のことが知られている。簡単な考察によりひもが２本又は３本のとき、Burau 表現は忠実であることがわかる。Moody は９本以上のひもによる組みひも群の Burau 表現は忠実でないことを証明した。彼の導入したテクニックを改良して Long と Paton は６本以上のひもによる Burau 表現は忠実でないことを証明した。さらに最近 Bigelow は５本のひもによる Burau 表現は忠実でないことを証明した。ひもが４本のときについては未解決な問題である。一方、Gassner 表現の忠実性については、ひもが４本以上のときについて未解決な問題のようである。これらと同様にトレリ群のマグナス表現が忠実かどうかという問題は未解決な問題であったが、この節でこの問題の解決をみる。曲面の種数が１のときはトレリ群が無限巡回群と同型になることから簡単に忠実であることが示せる。しかし種数が２以上のときはトレリ群のマグナス表現は忠実でないことが証明される。

６節では、トレリ群のマグナス表現の既約分解を決定する。Burau 表現や Gasser 表現についての既約分解はすでに知られている。同様な問題をこの節で考察する。

７節では、写像類群のマグナス表現の幾何的解釈について考える。3節で示したように、写像類群のマグナス表現は Fox 微分を用いて定義される。この節では同じ表現を曲面の被覆空間を考えることによって別の定義を述べる。写像類群のマグナス表現は曲面の普遍被覆空間のある相対ホモロジー群への写像類群の作用として定義することができる。ここでこのホモロジー群の係数は整数であるが、整数環加群として考えるのではなく、被覆変換群としての曲面の基本群の整数による群環上の加群とみなす。そうするとこの作用はサイズが種数の２倍の行列とみなすことができる。すなわち、写像類群の元に対して、ある行列が対応することになるが、それを写像類群のマグナス表現として定義するのである。この応用として、写像類群のマグナス表現がシンプレクティクであることを証明する。この結果については既に知られているが、ここではさらに内在的な別証明を与える。さらにトレリ群のマグナス表現の核についての情報を得ることができる。５節で示したように、トレリ群のマグナス表現は忠実でないことが分かったので、次にこの核を決定することが重要な問題であるが、ここではその部分的な解を与える。