論文の内容の要旨

論文題目　Universal characters and Integrable systems (普遍指標と可積分系)

氏名　津田 照久

本論文は二部に分かれている. 第 I 部では普遍指標の特徴付ける無限次元可積分系の理論, また第 II 部ではガルニエ系の理論を主題とする. 以下, それぞれについて要旨を述べる.

第 I 部. Universal characters and an extension of the KP hierarchy (普遍指標と KP 階層の拡張)

Schur 多項式の一つの拡張に, 小池による普遍指標 (universal character) がある. 普遍指標 $S_{[\lambda,\mu]}(x,y)$ は, ヤング図形の組 $[\lambda,\mu]$ に付随して定まる $(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,y_1,y_2,\cdots)$ の多項式であって, 一般線形群の既約有理表現の指標を表すものである.

一方で, 佐藤幹夫らの研究が明らかにしたように, 重要なソリトン方程式のクラスである KP 階層は, Schur 多項式が特徴付ける無限次元可積分系である.

従って, 普遍指標が特徴付ける無限次元可積分系は一体何か？という問題意識は自然である. 第 I 部ではその疑問に対する一つの解答を与える. 以下に主結果を述べる：

(1) 普遍指標が特徴付ける無限次元可積分系を構成した (以下, UC 階層と呼ぶ). UC 階層は無限階の非線形偏微分方程式系で与えられ, KP 階層の自然な拡張と見なせる.

(2) UC 階層の解全体は, 佐藤 Grassmann 多様体の直積を成す.

(3) UC 階層の対称性は無限次元リー環 $\mathfrak{gl}(\infty)\oplus\mathfrak{gl}(\infty)$ で与えられる.

上記の結果について説明する.

ヤング図形の組 $[\lambda,\mu]=[(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_l),(\mu_1\geq\cdots\geq\mu_{l'})]$ に対して, 普遍指標：

$$S_{[\lambda,\mu]}(x,y)\overset{\mathrm{def}}{=}\det\begin{pmatrix} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}(y), & 1\leq i\leq l' \\ p_{\lambda_{i-l'}-i+j}(x), & l'+1\leq i\leq l+l' \end{pmatrix}_{1\leq i,j\leq l+l'}$$

と定義する. 但し $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)k^n=e^{\xi(x,k)}$, $\xi(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}x_nk^n$ および $p_{-n}(x)=0$, $(n>0)$ とおいた. また $q_n(y)$ は $p_n(x)$ において $x\to y$ と変数を書き換えたものとする. $\{S_{[\lambda,\mu]}(x,y)\}_{\lambda,\mu}$ は多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の基底を成す.

定理 1　$S_{[\lambda,\mu]}(x,y) = X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_l} Y_{\mu_1}\cdots Y_{\mu_{l'}}\cdot 1.$

ここで微分作用素 X_n, Y_n $(n\in\mathbb{Z})$ を以下で導入した：

$$\begin{aligned} X(k) &= \textstyle\sum_n X_n k^n = \exp(\xi(x-\tilde{\partial}_y,k))\exp(-\xi(\tilde{\partial}_x,k^{-1})),\\ Y(k) &= \textstyle\sum_n Y_n k^{-n} = \exp(\xi(y-\tilde{\partial}_x,k^{-1}))\exp(-\xi(\tilde{\partial}_y,k)).\end{aligned}$$

この微分作用素 (頂点作用素) を用いて $\tau=\tau(x,y)$ に対する次の双線形関係式を与える：

$$\sum_{m+n=-1} X_m^*\tau\otimes X_n\tau = \sum_{m+n=-1} Y_m^*\tau\otimes Y_n\tau = 0.$$

(X_n^*, Y_n^* は, X_n, Y_n において $(x,y)\to(-x,-y)$ と書き換えたものとした.) 上の 1 式目は以下の広田型微分方程式 (展開パラメタ：u, v についての母関数と見る) と同値である.

$$\sum_{k+l+m=-1} p_k(-2u)p_{-l}(\tilde{D}_x)p_m(\tilde{D}_y)\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_nD_{x_n}\right)\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_nD_{y_n}\right)\tau(x,y)\cdot\tau(x,y)=0.$$

(2 式目も同様.) 双線形関係式から得られる $\tau(x,y)$ に対する一連の微分方程式全体を UC 階層と呼ぶ. 例えば, 上式の定数項から $\sum_{m=0}^{\infty}p_{m+1}(\tilde{D}_x)p_m(\tilde{D}_y)\tau(x,y)\cdot\tau(x,y)=0$ なる方程式を得る. 実は, UC 階層の含む全ての微分方程式は無限階である. また全ての普遍指標は UC 階層の解である. 普遍指標が Schur 多項式の拡張であることから期待されるように, UC 階層は KP 階層の自然な拡張を与える. (実際, UC 階層は KP 階層を特殊解として含む.)

フェルミオンの Fock 空間 $\mathcal{F}$ と多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の同型写像 (ボゾン＝フェルミオン対応) を構成した. UC 階層をフェルミオンの言葉で書き直すことにより, UC 階層の解の無限小変換の対称性が無限次元リー環 $\mathfrak{gl}(\infty)\oplus\mathfrak{gl}(\infty)$ で記述されることを示した. また $\mathfrak{gl}(\infty)\oplus\mathfrak{gl}(\infty)$ の元の $\mathbb{C}[x,y]$ 上への実現は, 前述の頂点作用素を用いて与えられる.

$f(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ を普遍指標多項式で展開する：

$$f(x,y)=\sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda\mu}S_{[\lambda,\mu]}(x,y).$$

但し $f_{\lambda\mu}=f_{\lambda\mu}(0,0)$, $f_{\lambda\mu}(x,y)=\sum_{\eta,\nu,\tau}C^{\eta}_{\tau\lambda}C^{\nu}_{\tau\mu}S_\eta(\tilde{\partial}_x)S_\nu(\tilde{\partial}_y)f(x,y)$ とした. ここで $C^{\lambda}_{\mu\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数と呼ばれる組合せ論的な非負整数である.

定理 2　$f(x,y)$ が UC 階層の解である.
$\iff$ (A) 展開係数 $f_{\lambda\mu}$ が Plücker 関係式を満たす.
$\iff$ (B) $f_{\lambda\mu}(x,y)$ が Plücker 関係式を満たす.

上記 (A) により, {UC 階層の解全体} $\simeq$ (佐藤 Grassmann 多様体)$^{\times 2}$ (直積) が従う. また (B) より, UC 階層の無限階の方程式が Plücker 関係式に等価であることが分かる. (これは $f_{\lambda\mu}(x,y)$ が f の無限階微分を含むことと整合する.) さらに UC 階層の解は, KP 階層の解の組に微分作用素を代入したものを用いて明示される：

定理 3　$\tau_1(x),\tau_2(x)$ ：KP 階層の解.
$\iff \tau(x,y)=\tau_1(x-\tilde{\partial}_y)\tau_2(y-\tilde{\partial}_x)\cdot 1$ ：UC 階層の解.

第 II 部. Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system (ガルニエ系に付随する戸田方程式および特殊多項式)

第 II 部では, (パンルベ VI 型方程式 P_{VI} の拡張である) ガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ について考察し, 以下のような結果を得た：

(1) ガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ に付随するタウ関数の列が戸田方程式を満たす.

(2) 特に $\mathcal{H}_N$ の代数関数解に付随するタウ関数の列は, 適当な変数変換の下で特殊多項式の族 $T_{m,n}$ を定める. この $T_{m,n}$ は普遍指標を用いて表される.

(3) 同様に, 有理関数解に対しても特殊多項式の族 $R_{m,n}$ を構成する. この $R_{m,n}$ は Schur 多項式で表される.

上記の結果について説明する.

パラメタ $\vec{\kappa}=(\kappa_0,\kappa_1,\kappa_\infty,\theta_1,\cdots,\theta_N)\in\mathbb{C}^{N+3}$ として, 以下の多時間ハミルトン系 $\mathcal{H}_N=\mathcal{H}_N(\vec{\kappa})$ を (N-変数) ガルニエ系と呼ぶ.

$$\mathcal{H}_N:\qquad \frac{dq_i}{ds_j}=\frac{\partial H_j}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{ds_j}=-\frac{\partial H_j}{\partial q_i},\quad (i,j=1,\cdots,N).$$

ハミルトン関数 H_i $(i=1,\cdots,N)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} s_i(s_i-1)H_i &= q_i\left(\alpha+\sum_j q_jp_j\right)\left(\alpha+\kappa_\infty+\sum_j q_jp_j\right)+s_ip_i(q_ip_i-\theta_i)\\ &\quad -\sum_{j(\neq i)}R_{ji}(q_jp_j-\theta_j)q_ip_j-\sum_{j(\neq i)}S_{ij}(q_ip_i-\theta_i)q_jp_i\\ &\quad -\sum_{j(\neq i)}R_{ij}q_jp_j(q_ip_i-\theta_i)-\sum_{j(\neq i)}R_{ij}q_ip_i(q_jp_j-\theta_j)\\ &\quad -(s_i+1)(q_ip_i-\theta_i)q_ip_i+(\kappa_1s_i+\kappa_0-1)q_ip_i. \end{aligned}$$

ここで $R_{ij}=s_i(s_j-1)/(s_j-s_i)$, $S_{ij}=s_i(s_i-1)/(s_i-s_j)$, $\alpha=-(\kappa_0+\kappa_1+\kappa_\infty+\sum_i\theta_i-1)/2$ とした. ガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ は P_{VI} のモノドロミ保存変形の立場からの拡張である. 実際 $N=1$ のとき, $\mathcal{H}_N$ は P_{VI} のハミルトン系による表示に等しい.

$\mathcal{H}_N$ の双有理対称性の群 $\boldsymbol{G}$ が格子を含む無限群を成すことを明らかにした. $\mathcal{H}_N$ に対してタウ関数と呼ばれる従属変数 $\tau(s)$, $s=(s_1,\cdots,s_N)$ が定まる. 格子上のタウ関数の列が戸田方程式を満たすことを示した：

定理 4 $\boldsymbol{G}\supset\langle l\rangle\simeq\mathbb{Z}$：格子とする. タウ関数の列 $\tau_n=l^n(\tau)$, $(n\in\mathbb{Z})$ は以下の戸田方程式を満たす.

$$XY\log\tau_n=C\frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2},\quad C：定数\ (\neq 0).$$

ここで X,Y は $[X,Y]=0$ (可換) を満たすベクトル場である.

対称性の群 $\boldsymbol{G}$ の適当な元の固定点が $\mathcal{H}_N$ の代数関数解を与えることを示した：

定理 5　$\mathcal{H}_N$ は以下の代数関数解を持つ.

$$\text{(A)} \qquad \kappa_0 = \kappa_1 = 1/2, \quad (q_i, p_i) = (\theta_i\sqrt{s_i}/\kappa_\infty, \kappa_\infty/2\sqrt{s_i}), \quad i = 1, \cdots, N.$$

付随するタウ関数は適当な変数変換の下で $t = (t_1, \cdots, t_N)$ の多項式となる (但し $t_i^2 = s_i$). (A) に対して $\boldsymbol{G}$ の格子の作用を考えると $\kappa_0 = m + n + 1/2$, $\kappa_1 = m - n + 1/2$, $(m, n \in \mathbb{Z})$ における代数関数解を得る. 付随するタウ関数は戸田方程式から計算可能だが, 同様の変数変換の下で多項式を定める. この多項式を $T_{m,n}(t)$ と表して, $\mathcal{H}_N$ の代数関数解に付随する特殊多項式と呼ぶ. (より一般にパラメタ $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \theta_1, \cdots, \theta_N) \in \mathbb{C}^{N+3}$ の任意の 2 成分が半整数の場合に $\mathcal{H}_N$ は代数関数を許し, それらは特殊多項式 $T_{m,n}(t)$ の微分有理式で与えられることを示した.)

定理 6　特殊多項式 $T_{m,n}(t)$ は普遍指標を用いて表される：

$$T_{m,n}(t) = N_{m,n} S_{[\lambda,\mu]}(x, y).$$

但し $u = |n - m - 1/2| - 1/2$, $v = |n + m - 1/2| - 1/2$ として, ヤング図形の組は

$$\lambda = (u, u-1, \cdots, 2, 1), \quad \mu = (v, v-1, \cdots, 2, 1),$$

また規格化因子 $N_{m,n} = (-1)^{u(u+1)/2} \prod_i t_i^{v(v+1)/2} \prod_{k=1}^{u} (2k-1)!! \prod_{k=1}^{v} (2k-1)!!$ とおいた. 変数の対応は $x_n = (\kappa_\infty + \sum_i \theta_i (-t_i)^n)/n$, $y_n = (\kappa_\infty + \sum_i \theta_i (-t_i)^{-n})/n$ である.

定理の証明の過程で, (行列式についての) ヤコビの恒等式の拡張を与え, それを用いた.

$\mathcal{H}_N$ は Lauricella の超幾何関数 F_D を特殊解として含む. 特別なパラメタに対して F_D は多項式に退化する (ヤコビ多項式の多変数化). 従って $\mathcal{H}_N$ は有理関数解を許すことが分かる. 例えば以下のような有理関数解を持つ：

$$\text{(R)} \quad \alpha + \kappa_\infty = 0, \quad \kappa_1 = 1, \quad (q_i, p_i) = (\theta_i s_i/\kappa_\infty, 0), \quad i = 1, \cdots, N.$$

$\boldsymbol{G}$ の格子の作用によって $\alpha + \kappa_\infty = -m$, $\kappa_1 = n$ における有理関数解を得る. 付随するタウ関数は適当な規格化の下で, $\mathcal{H}_N$ の有理関数解に付随する特殊多項式 $R_{m,n}(s)$ $(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を定める.

定理 7　特殊多項式 $R_{m,n}(s)$ は Schur 多項式を用いて表される：

$$R_{m,n}(s) = C_{m,n} S_\lambda(x).$$

ここでヤング図形を $\lambda = (n^m) = (\overbrace{n, n, \cdots, n}^{m})$ とし, $C_{m,n}$ は適当な定数である. また変数の対応は $x_n = (-\kappa_\infty + \sum_i \theta_i s_i^n)/n$ で与えられる.

上記の定理 6, 定理 7 はガルニエ系と, ヤング図形の組合せ論および一般線形群の表現論との関係を明らかにするものである.