論文審査の結果の要旨

氏　名　　津田　照久

ガルニエ系は２階フックス型線型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる完全積分可能非線型偏微分方程式系であり，多時間多重ハミルトン系で表される。１次元の場合がパンルヴェ６型方程式であり，そのベックルント変換や古典解について活発に研究がなされており，その深い構造は現在でも興味ある研究対象となっている。特に代数解については，ヤコビ多項式などいわゆるリッカチ型の解と梅村型の解が主なものである。

一方ガルニエ系については，線型常微分方程式のシュレジンジャー変換から多くの対象性が得られるはずであるが，これを具体的にガルニエ系のベックルント変換として実現したものはこれまで報告されていなかった。また代数解については，多変数ヤコビ多項式の存在は知られているがこの構造についても詳しくは調べられていない。さらに，梅村型の代数解は存在すら不明であった。

本論文は，ガルニエ系についての上記課題に対し大きな進展を与えているとともに，その代数解の構造を明らかにする目的で，普遍指標に付随する無限次元可積分系を提出しその構造を明らかにしたものである。論文は２つの部分からなり，第１部では普遍指標とＫＰ階層の拡張が論じられている。第２部の主題はガルニエ系で，そのベックルント変換と付随する戸田方程式，および代数解として現れる特殊多項式に関する結果が与えられている。普遍指標はシューア多項式の拡張の一つであり，後者は一つのヤング図形に対応するのに対し，ヤング図形の二つ組に付随して定まるもので，一般線型群の既約有理指標を表すものである。ところで，シューア多項式はＫＰ階層を特徴付けることが知られているから，普遍指標が特徴付ける無限無限次元可積分系を考えることは，ガルニエ系の研究の立場からは自然なことである。実際パンルヴェ方程式の有理解はＫＰ階層の方程式からの簡約によりシューア多項式で表されることがわかっている。ごく最近，６型パンルヴェ方程式の梅村型代数解が普遍指標で表されることが示されている。以下論文に沿ってその主な結果を記す。

第１部の主結果は次のように要約される。

(1) 普遍指標が特徴付ける無限次元可積分系を構成したこと。これをＵＣ階層と呼ぶ。ＵＣ階層は無限階の非線形偏微分方程式系で与えられ，ＫＰ階層の自然な拡張と見なすことができることを示した。

(2) ＵＣ階層の解全体は，佐藤グラスマン多様体の直積を成すこと。

(3) ＵＣ階層の対称性は無限次元リー環 $gl(\infty)\oplus gl(\infty)$ で与えられること。

結果のすべてを詳しく論じることはやめて，ここではＫＰ階層とＵＣ階層の関係に関する結果のみを引用する。ＵＣ階層の解はＫＰ階層の解の組に微分作用素を代入したもので明示的に与えられる。

定理 1　$\tau_1(x), \tau_2(x)$ ：ＫＰ階層の解。
$\iff \tau(x,y) = \tau_1(x-\tilde{\partial}_y)\tau_2(y-\tilde{\partial}_x)\cdot 1$ ：ＵＣ階層の解。

第２部では第１部で得られた普遍指標に関する結果も用いてガルニエ系に関する以下の結果が得られている。

(1) ガルニエ系 $\mathcal{H}_N$ に付随するタウ関数の列が戸田方程式を満たすこと。

(2) 特に $\mathcal{H}_N$ の代数関数解に付随するタウ関数の列は，適当な変数変換の下で特殊多項式の族 $T_{m,n}$ を定め，この $T_{m,n}$ が普遍指標を用いて表されること。

(3) 同様に，多変数ヤコビ多項式に対応する有理関数解に対して特殊多項式の族 $R_{m,n}$ を構成し，これをシューア多項式で表したこと。

上述のように，ガルニエ系に含まれるパラメータの平行移動を実現するベックルント変換を明示的に求めたのは本論文が始めてである。これを使って（１）の結果が得られる。定理の形で書けば

定理 2　l をパラメータの平行移動に対応するベックルント変換とする。このとき，タウ関数の列 $\tau_n = l^n(\tau)$ は戸田方程式

$$XY \log \tau_n = C\frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2},\quad C\text{: 定数 } (\neq 0)$$

を満たす。ここで X, Y は可換なベクトル場である。

また，６型パンルヴェ方程式の梅村解に対応するべきガルニエ系の代数函数解の系列が与えられ，これを普遍指標で具体的に表示したことも重要な成果である。

本論文で取り扱われている問題はパンルヴェ系の研究と比しても計算が複雑であり，これまでは十分な研究がなされていなかった。とくに，パラメータの平行移動を実現するベックルント変換をどのように計算するか苦労が重ねられていたところである。この困難をタウ函数の広田型方程式，この導出も論文提出者の仕事であるが，に注目することで克服した。また，代数解の存在は書いて与えれば難しいものではないが，多くの試行錯誤が積み重ねられた成果である。第１部の普遍指標に付随する無限次元可積分系の研究は結果自体も興味あるが，そのガルニエ系など有限次元可積分系への簡約など，今後の研究にいろいろな課題を与えている。なにより，ガルニエ系の代数解の構造などに応用されたことは興味深いことである。今後の研究の発展がますます期待される。

よって，論文提出者　津田　照久　は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。