論文の内容の要旨

論文題目 On the Structure of the Moduli Space of Supersingular Abelian Varieties
(超特異アーベル多様体のモジュライ空間の構造について)

氏　　名　Shushi Harashita（原下 秀士）

(1) Moduli of Supersingular Abelian Varieties with Endomorphism Structure
(自己準同型環構造付超特異アーベル多様体のモジュライ空間について)

本論文において, 自己準同型環構造付主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間 $\mathcal{S}_{g,L}$ の既約成分の分類とそれぞれの既約成分の次元の決定をした. 以下その概説をする.

素数 p を選び, それを固定する. 以下では多様体, スキームとして標数 p の体上のものしか扱わない. 対合 $*$ 付の代数体 L に対し, 自己準同型環構造付主偏極アーベル多様体とはアーベル多様体 X と L の整数環 $\mathcal{O}_L$ から $\mathrm{End}(X)$ への環準同型 θ と $\mathcal{O}_L$-線形な主偏極 η の三つ組である. 幾何学的不変式論によって自己準同型環構造付主偏極アーベル多様体のモジュライ空間 $\mathcal{A}_{g,L}$ が存在する. 超特異軌道 $\mathcal{S}_{g,L}$ は $\mathcal{A}_{g,L}$ の中の超特異アーベル多様体がなす点全体がなす閉集合に被約構造をいれた閉部分スキームとして定義される. $\mathcal{S}_{g,L}$ が空でないためには, L は $*$ が自明の時は総実体, 非自明の時は CM-体である必要がある.

主定理は以下のように述べられる. p は奇素数, p 上の $*$ が非自明で分岐している素点 $\mathfrak{p}$ では $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ ($\mathcal{O}_L$ の $\mathfrak{p}$-進完備化) は $\sqrt{-1}$ を持つという仮定のもとで, 自然な全射準有限な射

$$\Psi : \coprod_{x} \coprod_{\eta\in\Lambda_x} \prod_{\mathfrak{p}\in I_1\sqcup I_2} \mathcal{P}^{J_\mathfrak{p},irr}_{g_\mathfrak{p},L,\overline{\eta}} \to \mathcal{S}_{n,L}\otimes\overline{\mathbb{F}}_p$$

が存在する (定理 6.8). ここで, I_1 は $*$ で保たれる p の上にある $\mathcal{O}_L$ 素点の集合, I_2 は $*$ で保たれない p の上にある $\mathcal{O}_L$ 素点の集合の $*$ 同値類の集合, $\mathcal{P}^{J_\mathfrak{p},irr}_{g_\mathfrak{p},L,\overline{\eta}}$ は rigid PFTQ と呼ばれる超特異アーベル多様体の列でタイプが $J_\mathfrak{p}$ のもののモジュライ空間, x は各素点 $\mathfrak{p}$ でのタイプの集まり $(J_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ からなる有限集合の元, 最後に Λ_x は x によって定まる超特別アーベル多様体のある偏極の有限集合である. 実は Λ_x は x から定まる種数の四元ユニタリー群もしくはユニタリー群の類数個の元からなる (系 7.8). さらに $\mathcal{S}_{n,L}$ の既約成分の個数は $\sum_x \sharp\Lambda_x$ で与えられる (定理 6.11). $\mathcal{P}^{J_\mathfrak{p},irr}_{g_\mathfrak{p},L,\overline{\eta}}$ は既約非特異固有スキームで次元は $g_\mathfrak{p}, L, J_\mathfrak{p}$ に依存して計算できる (定理 6.10).

以下証明の方針を書く．まず自己準同型環構造を付けた場合の超特異トレリの定理を示す．これによって $\mathcal{S}_{n,L}$ の局所的な性質（特に各既約成分の性質）はすべて自己準同型環構造付版のデュドネ加群で捉えられる．次に超特別デュドネ加群の準偏極の分類をして，全ての主準偏極デュドネ加群がデュドネ加群版の rigid PFTQ （ある性質を充たす準偏極のデュドネ加群のフィルトレーション）の一番下に埋め込まれることを証明する．rigid PFTQ のモジュライ空間 $\mathcal{N}_g$ を詳しく調べることがこの論文の最も重要な部分である （5章）．結果として $\mathcal{N}_g$ の定義方程式が明示的に得られ，自己準同型環構造を付けた場合には，$\mathcal{N}_g$ においてすでに既約成分が幾つか現れる場合があることが分かる．（自己準同型環構造をいれない場合は $\mathcal{N}_g$ は既約.）その既約成分の集合は組み合わせ論的なデータ J_{p} （上ではタイプと呼んだ）の集合に一対一対応している．$\mathcal{N}_g^{J_{\mathrm{p}},irr}$ を $\mathcal{N}_g$ の一つの既約成分とするとそれは非特異で，定義方程式の明示式を調べることで $\mathcal{N}_g^{J_{\mathrm{p}},irr}$ の次元を計算することができる（論文ではその次元を $d(J_{\mathrm{p}})$ と書いている（定義 5.22））．$\mathcal{P}_{g_{\mathrm{p}},L,\overline{\eta}}^{J_{\mathrm{p}},irr}$ と $\mathcal{N}_g^{J_{\mathrm{p}},irr}$ は純非分離写像を除いて同型であるため $\mathcal{P}_{g_{\mathrm{p}},L,\overline{\eta}}^{J_{\mathrm{p}},irr}$ の非特異性と次元が得られる．

超特異軌道の大域的な問題は超特別アーベル多様体上の偏極の問題に帰着されるので，以上の考察を組み合わせて上の定理が得られる．7 章においてどのようにして $\sharp\Lambda_x$ が代数群の類数に結び付けられるかを書いた．シミリチュードをいれない群を扱うことによってうまくいく．

(2) The a-number Stratification on the Moduli Space of Supersingular Abelian Varieties
（超特異アーベル多様体のモジュライ空間に付随する a-数による階層構造について）

主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間は a-数によって定義される部分多様体によって分解される．本論文では，その部分多様体の既約成分の個数とそれぞれの既約成分の次元を決定した．

完全体 K 上のアーベル多様体 X に対し，a-数は K-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_K(\alpha_p, X)$ の次元として定義される．

主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間 S_g の局所閉部分スキーム $S_g(a)$ はその閉点が a-数が丁度 a の超特異アーベル多様体をパラメトライズするものとして定義する．

主結果は以下の通り．

0. $S_g(a)$ のザリスキー閉包を $S_g^c(a)$ とおくと，$S_g^c(a) = \bigcup_{a' \geq a} S_g(a')$ を得る．さらに $S_g^c(a)$ は $a = g$ でない限り連結である．

1. $S_g(a)$ の全ての既約成分の次元は
$$\left[\frac{g^2 - a^2 + 1}{4}\right]$$
で与えられる．

2. $S_g(a)$ の既約成分の個数は
$$\begin{cases} \binom{(g-2)/2}{(g-a-1)/2} H_g(1,p) & g \text{ 偶数}, a \text{ 奇数の時}, \\ \binom{(g-1)/2}{(g-a)/2} H_g(p,1) & g, a \text{ 奇数の時}, \\ \binom{g/2-1}{(g-a)/2} H_g(p,1) + \binom{g/2-1}{(g-a)/2-1} H_g(1,p) & g, a \text{ 偶数の時}, \\ \binom{(g-1)/2-1}{(g-a-1)/2} H_g(1,p) + \binom{(g-1)/2-1}{(g-a-1)/2-1} H_g(p,1) & g \text{ 奇数}, a \text{ 偶数の時}, \end{cases}$$
に等しい．ここに $H_g(p,1)$ は四元ユニタリー群の主種数に対する類数，$H_g(1,p)$ は同群の非主種数に対する類数である．

証明は K.-Z. Li と F. Oort の理論で重要な役割をする rigid PFTQ と呼ばれる準偏極超特異デュドネ加群のフィルトレーションをさらに深く考察することから始める. すなわちモジュライ空間を構成するときに必要なフィルトレーションの一番下にある主準偏極をもつデュドネ加群の良い基底を選ぶという操作をする. これによって種数 g の rigid PFTQ のモジュライ空間 $\mathcal{N}_g$ のアファイン開部分多様体からある対称性をもつ巾零 $g \times g$-行列たちがなす代数多様体 ∇_g への全射エタール写像を得る. a-数が a という条件は上の巾零行列の階数が $g-a$ であるということに帰着されるため, 階数が $g-a$ である ∇_g の局所閉部分多様体 $\nabla_g(a)$ を調べることが最初のステップである. $\nabla_g(a)$ は非常に初等的な対象であるので詳しく調べられる. すなわち $\nabla_g(a)$ は

$$\begin{cases} \dbinom{(g-2)/2}{(g-a-1)/2} & g \text{ 偶数 } a \text{ 奇数の時}, \\ \dbinom{[g/2]}{[(g-a)/2]} & \text{その他の場合} \end{cases}$$

個の既約成分を持ち, その全ての既約成分は同じ次元 $\left[(g^2-a^2+1)/4\right]$ を持つ.

連結性の証明は上の議論をふまえて F. Oort が証明した L-軌道の連結性に帰着させる. L は Ekedahl-Oort ストラティフィケーションの一つ $S^c_{\{0,\cdots,0,1\}}$ である. $S^c_g(a)$ の全ての既約成分がある L-軌道の既約成分を含み, 逆に任意の L-軌道の既約成分はある $S^c_g(a)$ の既約成分に含まれることが証明される.

次に $S_g(a)$ 既約成分の個数をどのように決定するかを概説する. 形式的な議論によって $\nabla_g(a)$ の各既約成分に対しある類数個の $S_g(a)$ 既約成分が定まるのだが, 重複の有無について微妙な問題が残っている. そのためにもう一つの超特異デュドネ加群の不変量である K.-Z. Li が定義した指数を利用する. この不変量は非常に自然に定義されるものだが超特異デュドネ加群に対してしか定義されない. $\nabla_g(a)$ の各既約成分の一般元を与える主準偏極デュドネ加群の指数を直接行列演算を通して計算することによって, 異なる $\nabla_g(a)$ の既約成分は異なる指数を与えることが証明できる. 以上により重複がないことが分かる. さらにこの議論の過程で先の類数がどの種数の類数であったかまで明示的に与えることができるため, 上のような結果が得られる.

最後の章において, $S_g(a)$ $(a=1,\cdots,g)$ が S_g の中でどのように入っているかや有理点の計算への応用等, 低次元の場合の詳細を書いた. この時, a-数による階層構造によって基本的な S_g 分割（例えば有理点の数の明示的な計算を可能にするぐらいのもの）が与えられることが一つのキーポイントである.