論文審査の結果の要旨

氏　名　原　下　秀　士

論文題目：On the Structure of the Moduli Space of Supersingular Abelian Varieties
（超特異アーベル多様体のモジュライ空間の構造について）

提出された論文は実質上，下記の表題の二つの論文からなる．

(1) Moduli of Supersingular Abelian Varieties with Endomorphism Structure
（自己準同型環構造付超特異アーベル多様体のモジュライ空間について）

(2) The a-number Stratification on the Moduli Space of Supersingular Abelian Varieties
（超特異アーベル多様体のモジュライ空間に付随する a-数による階層構造について）

論文(1)において原下氏は，正標数の体上の自己準同型環構造付の主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間 $\mathcal{S}_{g,L}$ の既約成分の分類とそれぞれの既約成分の次元の決定をした．さらに既約成分の個数をある種の代数群の類数として表示した．

以下，素数 p を一つ固定し，考えるアーベル多様体やスキームは全て標数 p の体上定義されているとする．

代数体 L とその対合 $*$ (位数2の自己同型) が与えられているとする．このとき対 $(L,*)$ を自己準同型環にもつ，自己準同型環構造付主偏極アーベル多様体とはアーベル多様体 X と L の整数環 $\mathcal{O}_L$ から $\mathrm{End}(X)$ への環準同型 θ と $\mathcal{O}_L$-線形な主偏極 η で，それによる Rosati 対合が $*$ を引き起こすものとなるものの三つ組 (X,θ,η) である．

幾何学的不変式論による標準的手法で，自己準同型環構造付主偏極アーベル多様体の同型類を分類するモジュライ空間 $\mathcal{A}_{g,L}$ の存在が言える．このモジュライ空間の中で，超特異軌跡 (supersingular locus) $\mathcal{S}_{g,L}$ は，$\mathcal{A}_{g,L}$ の中の点で超特異アーベル多様体に対応するものがなす閉集合に，被約構造をいれた閉部分スキームとして定義される．$\mathcal{S}_{g,L}$ が空でないためには, L は $*$ が恒等写像のときは総実代数体, そうでないときは CM-体である必要がある．

主たる結果は $\mathcal{S}_{g,L}$ の次元と既約成分の個数の記述である．このためにこれをもっと取り扱い易い線形代数で記述できる別のスキームによって全射準有限写像で覆う．この別のスキームは超特異アーベル多様体 X のデュドンネ加群 $\mathbb{D}_p(X)$ を部分加群として含む超特別デュドンネ加群のある種の旗多様体として与えられる．これの詳細な記述が論文の技術的な核心である．

論文(2)で原下氏は，特に自己準同型環構造を付けることをしない一般の主偏極超特異アーベルのモジュライ空間の a-数による軌跡付け (stratification) を深く調べた．ここで閉体 k 上のアーベル多様体 X の a-数とは，k-ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(\alpha_p, X)$ の k 上の次元として定義される．

主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間は a-数によって定義される部分多様体によって軌跡分解される．本論文(2)では，その部分多様体の既約成分の個数とそれぞれの既約成分の次元を決定した．

超特異アーベル多様体のモジュライ空間の研究はオランダの Franz Oort によって長い間かけて研究されている．その初期の過程で彼は次元２，３の場合には大阪大学の伊吹山知義氏や 東京大学の桂利行氏などとの共同研究によって大きな成果を得て，数年前に K.-Z. Li との共同研究によって一般次元を取り扱う基本的な手法を確立した．本研究は，この Li-Oort の研究に大きな影響を受けて成し遂げられたものであり，手法も似た点がある．

しかしながら，自己準同型環を付した論文 (1) の場合は，Li-Oort に現れないより技術的に難しい局面に出会い，それを適切に処理するなど随所に興味深い新たな考察を行っている．また論文 (2) では，Li-Oort が分析を成しえなかった余次元の低い軌跡 (strata) の次元と既約成分の決定を新しいアイデアで解決している．

これらの点を総括すれば，論文提出者は当論文において，自己の研究主題において研究上の高い技術的な力量を示すと同時に，真に新規性のある研究成果を得ていると言える．

よって論文提出者 原下秀士 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．