論文の内容の要旨

論文題目 Optimal Portfolio of the Low Liquid Asset
(低流動性資産のポートフォリオ最適化)

氏　　名 松本　浩一

本論文では安全資産と危険資産のポートフォリオ最適化問題を取り扱う．通常，ファイナンスでは任意の時間に取引が可能なモデルを考える場合が多い．しかし，資産の流動性が十分でない場合，公正な条件で取引をしてくれる相手がいつでも見つかるとは限らない．そこで，本論文では危険資産の流動性が十分でないと仮定し，取引可能な時刻をポアソン過程のジャンプ時刻で表現する．また，投資家は対数型効用関数または冪乗型効用関数を持つと仮定する．このような設定の下で流動性の低下が投資戦略にどのような影響を与えるかを明らかにする．

モデル設定

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\})$ を通常の条件を満たすフィルター付き確率空間とする．P における $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動を $\{B(t); 0 \leq t \leq T, B(0) = 0\}$ とする．また，$\{P(t); 0 \leq t \leq T, P(0) = 0\}$ を強度 λ の $\{\mathcal{F}_t\}$-ポアソン過程とする．

時刻 t における安全資産の価格過程 $\beta(t)$ と危険資産の価格過程 $S(t)$ が以下の確率微分方程式に従うことを仮定する．

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= r\beta(t)dt, \\ \beta(0) &= 1, \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= S_0. \end{aligned}$$

ここで，S_0, μ, σ は正の定数とし，$r < \mu$ を仮定する．危険資産の流動性は十分でなく，その取引はポアソン過程のジャンプ時刻にのみ実現可能であると仮定する．したがって，投資家は平均的な取引成功回数を

知っているが, 事前に取引成功時刻を知ることはできない. また, ポアソン過程の強度が強いほど取引の成功確率は高くなるので, 強度が強いことは流動性が高いことを意味する.

本論文では有限な投資期間 $[0,T]$ における最適ポートフォリオ問題を取り扱う. つまり, 投資家の値関数と最適投資戦略について研究する. 投資家は時点 $t\in[0,T]$ において, 危険資産を $W_1(t)$, 安全資産を $W_0(t)$ 保有しており, $V(t)$ だけ安全資産から危険資産へ資産の入れ替えを試みるとする. 前述のように危険資産の取引はポアソン過程 $P(t)$ がジャンプしたときのみ成功するので, $W_1(t)$ と $W_0(t)$ はそれぞれ, 確率微分方程式

$$\begin{aligned}
dW_1(t) &= W_1(t-)\frac{dS(t)}{S(t)}+V(t)dP(t),\\
W_1(0) &= w_1,\\
dW_0(t) &= W_0(t-)\frac{d\beta(t)}{\beta(t)}-V(t)dP(t),\\
W_0(0) &= w_0
\end{aligned}$$

に従う. ここで, w_1, w_0 は危険資産と安全資産の初期保有額で正の定数とする. また, 投資家の意思に基づいて決定されるこの $V(t)$ を投資戦略と呼ぶ.

$[t,T]$ において投資家は空売りや総資産以上の危険資産への投資を禁じられているとすると, 投資戦略 V は

$$-W_1(s-)\le V(s)\le W_0(s-),\quad t\le s\le T$$

を満たす必要がある. V がこの条件を満たして可予測なとき, この V を $[t,T]$ における許容的投資戦略と呼ぶ. 本論文では許容的投資戦略の中で最適投資戦略を考える.

投資家の全資産を $W(t)$ とし, 危険資産への投資比率を $X(t)$ とする. これらの変数は $W_0(t), W_1(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
W(t) &= W_0(t)+W_1(t),\\
X(t) &= \frac{W_1(t)}{W_0(t)+W_1(t)}
\end{aligned}$$

のように表される. 投資戦略 V に対応する危険資産の投資比率を v とする. v は V と一対一に対応し,

$$v(t)=\frac{V(t)+W_1(t-)}{W_0(t-)+W_1(t-)}$$

と表現できる. したがって, V と v は同一視できるので v も投資戦略と呼ぶ. V が $[t,T]$ における許容的投資戦略であることは v が可予測で, $0\le v(s)\le 1 (t\le s\le T)$ であることと同値である. そこで, $[t,T]$ における許容的投資戦略の集合を

$$\mathcal{V}[t,T]=\{v|v\text{ は可予測}, 0\le v(s)\le 1\ (t\le s\le T)\}$$

のように定義する. また, 投資戦略 v を明示的に示したいときは, $W(t), X(t)$ をそれぞれ $W(t;v), X(t;v)$ のように表記することとする.

投資家の効用関数を $U:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ とする. この場合, 最適投資戦略 v^λ は $\mathcal{V}[0,T]$ の中で $E[U(W(T;v))]$ を最大化させる戦略であり, 値関数 $V^\lambda(t,x,w):[0,T]\times[0,1]\times(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は以下によって定義される.

$$V^\lambda(t,x,w) = \sup_{v\in\mathcal{V}[t,T]} E[U(W(T;v))|\mathcal{F}_t]|_{(X(t),W(t))=(x,w)}.$$

$E[\cdot]$ は P の下での期待値である.

対数型効用関数

$U(W)=\log W$ のときについて考える. x_0 を次のように定義する.

$$x_0=\frac{\mu-r}{\sigma^2}.$$

ここで，$0 < x_0 < 1$ とする．危険資産が十分に流動的で連続的取引が可能なとき，最適投資戦略 v^∞ と値関数 $V^\infty(t,x,w)$ は

$$
\begin{aligned}
v^\infty(t) &= x_0, \\
V^\infty(t,x,w) &= \log w + \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}\right)(T-t)
\end{aligned}
$$

によって与えられることが知られている．これに対して本論文では危険資産が十分に流動的でないとき, 以下の定理が得られることを示す．

Theorem 1.2.1 最適投資戦略 v^λ は存在し，値関数 V^λ は以下によって与えられる．

$$
V^\lambda(t,x,w) = \log w + A^\lambda(T-t,x).
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&A^\lambda(t,x) = \int_0^t e^{-\lambda s} K(s,x) ds + \lambda \int_0^t \sup_{0\le y\le 1} \left(\int_0^s e^{-\lambda u} K(u,y) du \right) ds, \\
&K(t,y) = E\left[f(Y^y(t))\right], \\
&f(y) = (\mu - r)y + r - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2, \\
&Y^y(t) = \frac{yS(t)/S_0}{yS(t)/S_0 + (1-y)\beta(t)}.
\end{aligned}
$$

特に λ が十分に大きいとき, 最適投資戦略は一意的で以下を満たす．

$$
|v^\lambda(t) - x_0| \le C\frac{1}{\lambda}, \quad 0 \le t \le T.
$$

ここで C は定数である．

この定理により最適投資戦略の存在は示せたが, 最適投資戦略を解析的式で表現することはできない．そこで，次の定理により最適投資戦略の漸近展開が可能であることを示す．

Theorem 1.2.2 次を満たす有界で連続な関数 $h_i^* : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $i \ge 1$ が存在する．すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\left| v^\lambda(T-t) - \left(x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^*(\lambda t)}{\lambda^i} \right) \right| \le C_n \frac{1}{\lambda^{n+1}}, \quad 0 \le t \le T, \lambda \ge \lambda_n, \\
&\left| \frac{\partial}{\partial x} V^\lambda(T-t, x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^*(\lambda t)}{\lambda^i}, w) \right| \le C_n \frac{1}{\lambda^{n+2}}, \quad 0 \le t \le T, \lambda \ge \lambda_n, \\
&\left| V^\lambda(T-t, v^\lambda(T-t), w) - V^\lambda(T-t, x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^*(\lambda t)}{\lambda^i}, w) \right| \le C_n \frac{1}{\lambda^{2n+3}}, \quad 0 \le t \le T, \lambda \ge \lambda_n.
\end{aligned}
$$

ここで C_n，λ_n は正の定数である．

本論文では h_i^* が逐次的に計算可能であることを示す．例えば $i=1$ のとき，

$$
h_1^*(t) = 2\sigma^2 x_0(1-x_0)\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\frac{L_1(t)}{L_0(t)}
$$

となる．ここで

$$
L_n(t) = \int_0^t s^n e^{-s} ds, \quad n \ge 0
$$

である．

次に流動性の低下が期待効用にどのような影響を与えるかを示す.

Theorem 1.2.3 任意の $0 \leq t \leq T$ に対して，$\lambda \to \infty$ のとき，

$$V^{\lambda}(t,x,w) \to V^{\infty}(t,x,w)$$

及び，

$$\lambda(V^{\infty}(t,x,w) - V^{\lambda}(t,x,w)) \to \frac{1}{2}\sigma^2(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\sigma^4 x_0^2(1-x_0)^2(T-t)$$

である．この収束は $0 \leq x \leq 1$ において一様である.

冪乗型効用関数

$U(W) = W^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ のときについて考える．x_0 を次のように定義する.

$$x_0 = \frac{\mu - r}{(1-\alpha)\sigma^2}.$$

ここで，$0 < x_0 < 1$ とする．危険資産が十分に流動的で連続的取引が可能なとき，最適投資戦略 v^{∞} と値関数 $V^{\infty}(t,x,w)$ は

$$\begin{aligned} v^{\infty}(t) &= x_0, \\ V^{\infty}(t,x,w) &= w^{\alpha}\exp\left(\alpha\left(r + \frac{(\mu-r)^2}{2(1-\alpha)\sigma^2}\right)(T-t)\right) \end{aligned}$$

によって与えられることが知られている．これに対して本論文では危険資産が十分に流動的でないとき，以下の定理が得られることを示す.

Theorem 2.1.1 最適投資戦略 v^{λ} は存在し，値関数は以下によって与えられる.

$$V^{\lambda}(t,x,w) \;=\; w^{\alpha}A^{\lambda}(T-t,x).$$

ここで，$A^{\lambda}(t,x)$ は以下の積分方程式の解である.

$$A^{\lambda}(t,x) = \int_0^t D(t-s,x)e^{-\lambda(t-s)}\lambda\tilde{A}^{\lambda}(s)ds + D(t,x)e^{-\lambda t}.$$

ただし，

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^{\lambda}(t) = \sup_{0 \leq x \leq 1} A^{\lambda}(t,x), \\ &D(t,y) = E\left[e^{\int_0^t f(Y^y(s))ds}\right], \\ &f(y) = \alpha(\mu-r)y + \alpha r - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\sigma^2 y^2 \end{aligned}$$

であり，$Y^y(t)$ は確率微分方程式

$$\begin{aligned} dY^y(t) &= Y^y(t)(1-Y^y(t))(\mu - r - \sigma^2(1-\alpha)Y^y(t))dt + Y^y(t)(1-Y^y(t))\sigma dB(t), \\ Y^y(0) &= y \end{aligned}$$

の解である．特に λ が十分に大きいとき，最適投資戦略は一意的で以下を満たす.

$$|v^{\lambda}(t) - x_0| \leq C_0\frac{1}{\lambda}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

ここで，C_0 は定数である.

この定理により最適投資戦略の存在は示せたが, 最適投資戦略を解析的式で表現することはできない. そこで, 次の定理により最適投資戦略の漸近展開が可能であることを示す.

Theorem 2.1.2 すべての $N \in \boldsymbol{N}$ に対して以下を満たす最適投資戦略の近似 v_N^λ が存在する.

$$
\begin{aligned}
&|v^\lambda(t) - v_N^\lambda(t)| \le C_N \frac{1}{\lambda^{N+1}}, \quad 0 \le t \le T,\ \lambda \ge \lambda_N, \\
&\left| \frac{\partial A^\lambda(t, v_N^\lambda(T-t))}{\partial x} \right| \le C_N \frac{1}{\lambda^{N+2}}, \quad 0 \le t \le T,\ \lambda \ge \lambda_N, \\
&|\tilde{A}^\lambda(t) - A^\lambda(t, v_N^\lambda(T-t))| \le C_N \frac{1}{\lambda^{2N+3}}, \quad 0 \le t \le T,\ \lambda \ge \lambda_N.
\end{aligned}
$$

ここで, C_N と λ_N は定数である.

本論文では v_N^λ が逐次的に構築できることを示す. 例えば $N = 1$ のときは以下のようになる.

$$
v_1^\lambda(T-t) \quad = \quad x_0 + 2\sigma^2 x_0(1-x_0)\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\frac{M_{2,1}(\lambda,t)/2 + L_1(\lambda t)}{M_{1,1}(\lambda,t) + L_0(\lambda t)}\frac{1}{\lambda}.
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
L_n(t) &= \int_0^t s^n e^{-s} ds, \quad n \ge 0 \\
M_{n,1}(\lambda, t) &= \left(e^{f(x_0)t} - 1\right) L_n(\lambda t), \quad n \ge 0
\end{aligned}
$$

である.

次に流動性の低下が期待効用にどのような影響を与えるかを示す.

Theorem 2.1.3 任意の $0 \le t \le T$ に対して, $\lambda \to \infty$ のとき

$$
V^\lambda(t, x, w) \to V^\infty(t, x, w),
$$

及び,

$$
\begin{aligned}
&\lambda(V^\infty(t,x,w) - V^\lambda(t,x,w)) \\
&\quad \to \quad \frac{1}{2} w^\alpha \alpha(1-\alpha) e^{f(x_0)(T-t)} \left(\sigma^2(x-x_0)^2 + \sigma^4 x_0^2(1-x_0)^2(T-t)\right)
\end{aligned}
$$

である. この収束は $0 \le x \le 1$ において一様である.