

論文審査の結果の要旨

氏名 松本 浩一

本論文では安全資産と危険資産のポートフォリオ最適化問題を扱っている。通常ファイナンスでは任意の時間で取引が可能であるモデルを考えるが、本論文では危険資産の流動性が十分でなく、取引可能な時刻が intensity λ のポアソン過程のジャンプ時刻で与えられると仮定する。投資家は対数型効用関数または冪乗型効用関数を持つと仮定し、満期時刻での資産の期待効用を最大にする投資戦略が λ によりどのように変化するか、特に $\lambda = \infty$ の周辺でどのようになるかを明らかにしている。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\})$ をフィルター付き確率空間とし、 $B(t)$ を $\{\mathcal{F}_t\}$ -ブラウン運動、 $P(t)$ を intensity λ の $\{\mathcal{F}_t\}$ -ポアソン過程とする。時刻 t における安全資産の価格過程 $\beta(t)$ と危険資産の価格過程 $S(t)$ が以下の確率微分方程式で与えられるとする。

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= r\beta(t)dt, & \beta(0) &= 1, \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), & S(0) &= S_0. \end{aligned}$$

ここで、 S_0, μ, σ は正の定数とし、 $r < \mu$ を仮定する。投資家は時点 $t \in [0, T]$ において、危険資産を $W_1(t)$ 、安全資産を $W_0(t)$ 保有しており、 $V(t)$ だけ安全資産から危険資産へ資産の入れ替えを試みるとする。危険資産の取引はポアソン過程 $P(t)$ がジャンプしたときのみ成功するので、 $W_1(t)$ と $W_0(t)$ はそれぞれ、確率微分方程式

$$\begin{aligned} dW_1(t) &= W_1(t-) \frac{dS(t)}{S(t)} + V(t)dP(t), & W_1(0) &= w_1, \\ dW_0(t) &= W_0(t-) \frac{d\beta(t)}{\beta(t)} - V(t)dP(t), & W_0(0) &= w_0 \end{aligned}$$

に従う。ここで、 w_1, w_0 は危険資産と安全資産の初期保有額で正の定数とする。投資家は空売りや総資産以上の危険資産への投資がを禁じられていると仮定する。則ち、許容的投資戦略 V は

$$-W_1(s-) \leq V(s) \leq W_0(s-), \quad t \leq s \leq T$$

を満たし可予測なもの全体とする。投資家の効用関数を $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ とする。この場合、最適投資戦略 V^λ は $E[U(W(T; v))]$ を最大化させる戦略である。

本論文ではまず $U(W) = \log W$ の場合を考察し、最適戦略 V^λ が存在し、それが関数方程式から定まる関数 $v^\lambda(t), t \geq 0$, により、

$$V^\lambda(t) = v^\lambda(t)(W_0(t-) + W_1(t-)) - W_1(t-)$$

で与えられることを示した。さらに有界連続な関数 $h_i^* : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, i \geq 1$ が存在し

$$\left| v^\lambda(T-t) - \left(x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i^*(\lambda t)}{\lambda^i} \right) \right| \leq C_n \frac{1}{\lambda^{n+1}}, \quad 0 \leq t \leq T, \lambda \geq \lambda_n$$

となること、 h_i^* が逐次的に計算可能であることが示されている。値関数に関して同様な考察がなされている。例えば $i = 1$ のとき、

$$h_1^*(t) = 2\sigma^2 x_0(1-x_0) \left(x_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{L_1(t)}{L_0(t)}$$

となる。ここで

$$L_n(t) = \int_0^t s^n e^{-s} ds, \quad n \geq 0$$

である。

本論文では効用関数が冪乗型効用関数の場合にも、結果はより複雑になるが、同様な結果を示している。これらの結果は従来知られていた Merton の結果の拡張ともなっている。

以上のように本論文は独創性のあるきわめて質の高いもので、論文提出者 松本 浩一 は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。