論文内容の要旨

論文題目：On the Automorphism Group of the Submodule Lattice of a Module over Discrete Valuation Ring

（離散付値環上の加群の部分加群束の自己同型群について）

氏名：安田 幹

$\mathfrak{o}$ を極大イデアル $\mathfrak{p}$ を持つ離散付値環とし，M を長さ有限の $\mathfrak{o}$ 加群とする．すると $M \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1} \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2} \oplus \cdots \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_l}$ と書ける．ただし $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ はある非負整数の分割で，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l$ としておく．$\mathcal{L}(M)$ で M の $\mathfrak{o}$ 部分加群の全体を表すことにすると，$\mathcal{L}(M)$ は包含関係に関してモジュラー束をなす．この束 $\mathcal{L}(M)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ を求めることが本論文の主題である．

$\mathfrak{o}$ 加群 M の $\mathfrak{o}$ 自己同型群を $\mathrm{Aut}(M)$ と書くことにする．M の $\mathfrak{o}$ 自己同型は自然に $\mathcal{L}(M)$ に作用するので，自然な準同型 $\mathrm{Aut}(M) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ を得る．この準同型の像を $\mathrm{PAut}(M)$ と書くことにする．M の（順序の付いた）基底 $e = (e_1, e_2, \ldots, e_l)$ を 1 つ決めると，これに付随したある $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ の部分群 $R(e)$ が定まって，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M) = R(e) \cdot \mathrm{PAut}(M)$, $R(e) \cap \mathrm{PAut}(M) = 1$ と分解する．

1939 年頃の一連の論文において，R. Baer は実質的に次のことを示した：$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ならば，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M) \cong R(e) \ltimes \mathrm{PAut}(M)$ であり，かつ

$$R(e) \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$$

である．ここで $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ は $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ の環自己同型群を表す．この Baer の結果は，3 次元以上の有限射影幾何はある有限体上の有限ベクトル空間束と同型であることを主張する，いわゆる「有限射影幾何の基本定理」を含んでいる．

この $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ という条件を外せば，Baer の結果が成立しないことは明らかであったが，その他の λ に関して次の結果が出たのは実に約 50 年ぶりのことで，1988 年に C.Holmes が実質的に

以下を示した：$\mathfrak{o} = \mathbb{Z}_p$ (p 進整数環) のとき，$\lambda_1 = \lambda_2$，$\lambda_3 = 0$ であれば,

$$R(e) \cong (\mathfrak{S}_p^{\wr(\lambda_2-1)} \wr \mathfrak{S}_{p-2}) \times \left\{ \prod_{i=0}^{\lambda_2-2} (\mathfrak{S}_p^{\wr i} \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \right\}^3 .$$

ただし $\wr$ は wreath 積を表し，連続する wreath 積を指数の形で書いた．また，Holmes は $\lambda_1 > \lambda_2$ で $\lambda_3 = 0$ の場合にも同様の結果を得ている．

したがって，特に残りの $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 1$ の場合に対してこれら 2 つの結果の間にあるギャップを埋めようと，1990 年代になって，Schmidt, Holmes, Zacher, Costantini らによって幾つかの試みがなされている．

これら Baer の結果と Holmes の結果は，ある意味で 2 つの「極限」を与えていると考えることができる．すなわち，Baer の場合は $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ が M の $\mathfrak{o}$ 加群という代数的な情報のみによって完全に統制される場合であり，また Holmes の場合は，その反対に $\mathcal{L}(M)$ の束という組合せ論的構造が M の代数的情報を遥かに上回っている状態であると捉えられる．そしてこれら 2 つの両極端の間には，何か新しい対象が隠れているのではないかと期待できる．さらに、その新しい対象の構造を分析すれば、それは M の代数的構造と $\mathcal{L}(M)$ の組合せ論的構造のハイブリッドになっていると推測される．

本論文ではこのような視点に立ち，$R(e)$ を $\mathfrak{o}$ のある商集合の上の置換群として表現し，$R(e)$ がその置換群もしくは場合によってはそれらの直積の部分群に同型となることをまず示した．この置換群は，$\mathfrak{o}$ 上の全単射であって $\mathfrak{o}$ の中の付値・積・差を「ある意味で」保存するようなものから引き起こされるものである。ここでいう「ある意味で」とは，λ_1，λ_2，λ_3 をパラメータに持つ条件で，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ の場合には商集合 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ 上の環の構造を保つ（すなわち和と積を保存し，1 を固定する）という条件に一致し，λ_1 と λ_2 の差，また λ_2 と λ_3 の差が大きくなるにつれて制約が弱くなっていくものである．

上記の同型を示した後，この置換群の構造を分析することにより，$R(e)$ の構造を知ることができる．大雑把に言って，$R(e)$ はその商群として環自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ を含み，その核に環自己同型から「外れた」部分が現れる．但しその核の構造も，$\mathfrak{o}$ の環構造に依るところが大きい．具体的には，$R(e)$ の構造に関して以下の結果を得た：

$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ とする．すると，$R(e)$ のある正規部分群 N が存在して,

$$R(e)/N \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$$

となる．また,

$$N \cong \begin{cases} k^{\lambda_1-\lambda_2} & \lambda_2 = \lambda_3 > 2, \\ (k^\times)^{\lambda_1-\lambda_2} & \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

が成立する．但しここに $k \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{o}$ の剰余体を表す．特に，$\mathfrak{o}$ が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Witt 環の場合には，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M) \cong R(e) \ltimes \mathrm{PAut}(M)$ となる．また拡大 $R(e)/N$ もこの場合には分裂する．

$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$ とする．すると，$R(e)$ のある部分群 G, K が存在して,

$$R(e) \cong G \ltimes K.$$

さらに G の正規部分群 $N, \overline{N}$ ($N \supset \overline{N}$) が存在して,

$$G/N \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$$

および

$$N/\overline{N} \cong \begin{cases} k & \lambda_3 > 2, \\ k^\times & \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

また，ある群 $\overline{Q}_0, Q_0$ が存在して，

$$N \cong \overline{Q}_0 \times Q_0^{\lambda_1-\lambda_2} \times K.$$

ただしこの K は前出の K と同一のもので，

$$K \cong Q_1 \times Q_2 \times \cdots Q_{\lambda_2-\lambda_3-1}$$

とかける．各 Q_i は次の正規部分群列を持つ：

$$Q_i = L_i^{(i+1)} \triangleright L_i^{(i+2)} \triangleright \cdots \triangleright L_i^{(\lambda_2-\lambda_3+1)} = 1$$

ここで

$$L_i^{(j)}/L_i^{(j+1)} \cong k^{(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{j-i})^\times}.$$

もし $\mathfrak{o}$ が（形式的）1 変数冪級数環の場合には，上の列は全ての点で分裂する．また，$\mathfrak{o}$ が一般の場合でも，$\lambda_3 = 1$ であればこれはすべて分裂し，特に

$$Q_i \cong (k^{l(\lambda_2-1-i)})^{k^\times}.$$

また一方で，Q_i はアーベル部分群たちの積で書けることが示され，それにより特に $\lambda_3 \geq \frac{1}{2}\lambda_2$ の場合には K および Q_0 がアーベル群になることが示される：

$$K \cong \bigoplus_{i=1}^{\lambda_2-\lambda_3-1} \bigoplus_{j=i}^{\lambda_2-\lambda_3-1} \left(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2-\lambda_3-j}\right)^{(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{j-i})^\times \times k^\times}.$$

$$Q_0 \cong \bigoplus_{j=0}^{\lambda_2-\lambda_3-1} \left(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2-\lambda_3-j}\right)^{(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{j})^\times \times k^\times}.$$

$\overline{Q}_0$ に関しては省略するが，Q_0 の部分群であり，同様の記述ができる．

G/N や $N/\overline{N}$ の拡大の様子は，$\mathfrak{o}$ により異なる．例えば，$\mathfrak{o}$ が有限体上の 1 変数冪級数環の場合には，$G/\overline{N} \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3+1}$ となる．$\mathfrak{o}$ が有限体上の Witt 環の場合には，G/N は分裂する．

最後に，剰余体が有限体 $\mathbb{F}_q$ の場合には，$R(e)$ も有限になるので，上の構造定理より $R(e)$ の位数を求めることができる：

$$|R(e)| = \begin{cases} (q-1)\left|\mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}\right| q^{1-\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3+2\sum_{i=1}^{\lambda_2-\lambda_3-1} q^i + (\lambda_1-\lambda_2+1)q^{\lambda_2-\lambda_3}} & \lambda_3 = 1, \\ q\left|\mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}\right| q^{1-\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3+2\sum_{i=1}^{\lambda_2-\lambda_3-1} q^i + (\lambda_1-\lambda_2+1)q^{\lambda_2-\lambda_3}} & \lambda_3 > 2. \end{cases}$$