論文審査の結果の要旨

氏名　　安田　　幹

提出された論文は，離散付値環 $\mathfrak{o}$ 上の長さ有限の加群 M の $\mathfrak{o}$ 部分加群全体のなす束 (そく) $\mathcal{L}(M)$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ を記述したものである。

$\mathfrak{o}$ を決め，その極大イデアルを $\mathfrak{p}$ とおくと M は $\mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}e_l$ $(l \in \mathbb{N})$, $\mathfrak{o}e_i \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_i}$ $(\lambda_i \in \mathbb{N}\ (1 \leqq {}^\forall i \leqq l),\ \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_l)$ の形に表すことができ，M の同型類は分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ と 1 対 1 に対応する。例えば p を素数とし，$\mathfrak{o}$ として p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ をとると M は有限アーベル p 群で $\mathcal{L}(M)$ はその部分群束，$\mathfrak{o}$ として p 元体 $\mathbb{F}_p$ 上の 1 変数形式べき級数環 $\mathbb{F}_p[[t]]$ をとると，M は $\mathbb{F}_p$ 上の有限次元ベクトル空間 V に Jordan type が λ のべき零線型変換 N を併せ考えたもの，$\mathcal{L}(M)$ は N の作用で安定な V の部分空間の全体である。両者は p-primary lattice の例であり組合せ論的性質を多く共有するが，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ に $\mathfrak{o}$ からくる違いがある。$\mathfrak{o}$ として $\mathbb{F}_q$ 係数 Witt ベクトル環 $W(\mathbb{F}_q)$ と $\mathbb{F}_q[[t]]$ ($\mathbb{F}_q$ は素体と限らない有限体) をとった場合も同様である。そこで提出者は問題を一般の離散付値環 (剰余体も有限体とは限らない) の上の有限の長さの加群の問題ととらえ，その部分加群束の自己同型群を研究した。

M の $\mathfrak{o}$ 加群としての自己同型が引き起こす $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ の元全体を $P\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}\,M$ と書き，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ の元のうち $\mathfrak{o}e_i$ $(1 \leqq i \leqq l)$ および $\mathfrak{o}(e_1 + e_i)$ $(2 \leqq i \leqq l)$ をすべて固定するもの全体を $R(e)$ と書くと $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M) = P\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}\,M \cdot R(e)$, $P\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}\,M \cap R(e) = 1$ となる。Baer (1939, 1942) の扱った最も “素直な” $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (λ_4 以降もあってもよい) の場合には $P\mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}\,M \lhd \mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$, $R(e) \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1}$ (環自己同型群) となる。これは $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1}$ の元が正確に測れる “座標軸” が 3 本あれば，$\mathfrak{o}(e_1 + ae_2)$ $(a \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1})$ のように現れる係数環の元に対し，部分加群間の束の演算を用いて $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1}$ の加法・乗法が行えることを意味する。これと対照的に $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}_p$ で $\lambda_3 = 0$ の $M = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ に対する $\mathrm{Aut}\,\mathcal{L}(M)$ を Holmes (1988) が扱い，対称群の巨大な環積の形に書き表した。これは “座標軸” が 2 本しかない場合には束から係数環についてわかることはさまざまな i に対する (p^i) を平行移動した剰余類の間の包含関係ぐらいであることを意味する。

提出論文は中間の $\lambda_3 > 0$ の場合すべて (λ_4 以降もあってもよい) を扱い，$R(e)$ の元から，完全な環自己同型とはいかないまでも環自己同型の条件を緩めた係数環の置換が取り出されることを示している。ここでは $\lambda_2 > \lambda_3$ の場合を述べる ($\lambda_2 = \lambda_3$ のほうが易しい)。$R(e)$ の元は $U_1 = \{\, \mathfrak{o}(ae_1 + e_2) \mid a \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1} \,\}$, $U_2 = \{\, \mathfrak{o}(e_1 + ae_2) \mid a \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2} \,\}$ にそれぞれ作用し，その作用によって決まる。U_1, U_2 は，$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ($\mathcal{L}(\mathfrak{o}e_1 + \mathfrak{o}e_2)$ が $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 上の射影直線) の場合になぞらえれば “射影直線” の開被覆をなす 2 本のアフィン直線に相当する。ただし $U_2 \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2}$ であるが，U_1 は $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1}$ を $\mathfrak{u}_{\lambda_2} = 1 + \mathfrak{p}^{\lambda_2}$ の元による乗法で写りあうという同値関係 $\sim_{\mathfrak{u}_{\lambda_2}}$ で割った集合になる。U_1, U_2 への作用から $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_1})/\sim_{\mathfrak{u}_{\lambda_2}}$ の置換 σ と $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2}$ の置換 τ が引き起こされ，σ, τ はそれぞれ，環自己同型の条件を環演算の復元に必要な 3 番目の座標軸の “精度” λ_3 に応じて弱めた 3 法則 (付値法則・積法則・差法則) を満たし，1 を固定する。これは単に $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ に落とすと環自己同型になるという条件より強い。さらに σ と τ の間には U_1, U_2 の貼合せ部分の座標変換に相当する関係 (これも λ_3 に応じて弱めたもの) がある。逆にこれらの条件を満たす (σ, τ) から詳細な議論により $R(e)$ の元が構成できる。これが前半で示している「主同型定理」である。後半はこうして $R(e)$ が “表現” された，特別な条件を満たす (σ, τ) のなす群の構造を論じている。射影 $\Lambda\colon (\sigma, \tau) \mapsto \sigma$ からできる短完全系列は split し，$R(e)$ は $\ker \Lambda$ ($\sigma = \mathrm{id}$ と組になりうる τ 全体) に $\mathrm{im}\,\Lambda$ (σ として現れうるもの全体) が半直積と

してかかった群になる。τ は付値を保つので，$\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_2} \setminus \{0\}$ の元を付値で分けると $\ker \Lambda$ はその各部分集合の置換群の直積に埋め込まれるが，これは $\ker \Lambda$ の直積分解を与える。各直積因子の元は係数環の元の $\mathfrak{p}$ 進表示を用いて具体的に書き表すことができ，直積因子は $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ を積み重ねた可解群になる。直積因子の二通りの正規列から，構造が簡単になる特別な場合がそれぞれ導かれる。$\mathrm{im}\, \Lambda$ は $\ker \Lambda$ と似た構造をもつ群 ($\lambda_3 = 1$ の場合のみその上に $(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^\times$ を重ねたやはり可解な群) の上に環自己同型群 $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\lambda_3}$ が乗った構造を持つ。有限 abel p 群だけなら Costantini らの結果もあるが，提出者のアプローチでは一貫して $\mathfrak{o}$ を意識したことにより環自己同型を一般化した概念を抽出することに成功し，剰余体も有限と限らない一般の場合でも見通しのよい記述を与えた。

よって論文提出者安田幹は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。