論文の内容の要旨

論文題目：On transversal knot theory
(横断的結び目理論について)

氏名：William Gibson

本論文の主題は、平面曲線を用い、横断的結び目理論の研究を行うことである。修士論文では、divide 理論において扱われた３次元球面の単位円盤モデルを用い、結び目理論と同値な平面曲線理論を構成した。本論文ではまず最初に、２種類の２重点を持つ平面曲線による結び目理論の平面曲線モデルを導入する。次に３次元球面内の標準的接触構造に横断的な結び目理論と同値な平面曲線理論を、先ほど平面曲線モデルの一部として新たに構成する。また、その過程において、このモデル内の全ての平面曲線に対し、その Bennequin 数を計算するための組み合わせ的な手法を構成する。

Couture と Perron は divide からその結び目の閉ブレイド表示を得るアルゴリズムを確立した。Divide 理論は、ここで扱う横断的平面曲線理論の特別な場合であり、この論文では、彼等のアルゴリズムを平面曲線ブレイド表示を用いて再構成し、それが結び目の横断性を保っていることを証明する。証明において用いている手法は、divide 全てを含む、より大きな平面曲線のクラスにも適用できる。また同様のアイデアを用い、横断的結び目理論における Alexander の定理を証明することもできる。

最近、Birman と Menasco は３-ブレイドのある特別なクラスが横断的単純（transversally simple）ではないことを証明した。これは結び目の横断的同型類を決定するためには、結び目の同型類と Bennequin 数だけでは不足であることを意味する。ちなみに iterated torus knot は横断的単純であることが知られている。ここでは、平面曲線のある対称性に注目することにより、結び目が横断的単純であるために必要な条件を示す。

Bennequin 数（特に最大 Bennequin 数）は、Euler 類のような、結び目のトポロジカルな性質により特徴づけられる。本論文の後半では、まず、結び目 K の最小ブレイド指数 n が K とその鏡像 $\bar{K}$ の最大 Bennequin 数の平均に -1 をかけたものに等しくなるという性質（つまり、$n = -(\beta_{max}(K) + \beta_{max}(\bar{K}))/2$）が多くの結び目対し成立することを示し、さらにこの等式がどこまで拡張できるかを考察する。次に、等式 $\beta_{max}(K) + \beta_{max}(\bar{K})/2 = -1$ が成り立つ場合は K の HOMFLY 多項式が自明であることを示す。特に、もし $\beta_{max}(K) + \beta_{max}(\bar{K})/2 = -1$ と $|\beta_{max}(K) - \beta_{max}(\bar{K})|/2 \neq 0$ の両方が成立する結び目が存在するならば、HOMFLY 多項式は結び目の自明性を判定できないことになる。

よく知られているように、Bennequin 数は結び目解消数（gordian 数）とも密接に関係している。ここでは divide や free divide の自然な拡張として tree divide を導入し、reducible な tree divide について、その結び目の解消数が tree divide の 2 重点の数に等しいことを Bennequin 数を使って証明する。