論文の内容の要旨

Corwin-Greenleaf multiplicity function for Hermitian Lie groups (エルミート型リー群の Corwin-Greenleaf 重複度関数)

Salma Nasrin (サルマ ナスリン)

G をリー群とする。G のユニタリ表現とは、G がユニタリ作用素として連続に作用 するヒルベルト空間である。表現が非自明な G-不変部分空間を持たないとき、既約であると言う。G の既約なユ ニタリ表現の同値類のなす集合を G のユニタリ双対といい $\widehat{G}$ で表す。

H を G の閉部分群とする。ユニタリ表現の既約分解には二つの自然な問題設定が有る。一つは小さな群からの誘導表現 ($\nu \in \widehat{H}$ に対し $\mathrm{Ind}_H^G \nu$ と 記す) であり、もうひとつは、大きな群からの制限 ($\pi \in \widehat{G}$ に対し $\pi|_H$ と記す) である。既約分解の公式はそれぞれ *Plancherel* の公式、**分岐則**とよばれる。この博士論文のテーマは分岐則の問題を「軌道法」の視点から扱ったものである。

表現の制限 $\pi|_H$ に対し分岐則、すなわちその既約分解を示す直積分

$$\pi|_H \simeq \int_{\widehat{H}}^{\oplus} m_\pi(\nu)\nu d\mu(\nu) \quad (\text{直積分}). \tag{1}$$

を記述することは表現論の基本的な問題の一つである。

例えば、H が簡約リー群であればこのような分解は一意であり、**重複度関数** $m_\pi : \widehat{H} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ はユニタリ双対 $\widehat{H}$ 上の可測関数となる。一般に分岐則は重複度が ∞ だと、さまざまな困難な問題が生じる。分岐則の問題はさまざまな設定において考えられるが、$\pi|_H$ が H の表現として重複度が 1 の場合は、よりシンプルで詳細な分岐則の研究ができることが期待される。**重複度**に関して基本的な設問は次のようなものである。

問題 重複度 1 となるのはいつか？

上記の問題に関し、有限次元表現、無限次元表現双方に対して分岐則の重複度1定理を小林先生は最近証明した([5], [6])。この定理により、例えばClebsch-Gordanの公式、Pieriのルール、リーマン対称空間に対するPlancherelの公式 GL_m-GL_n 双対性、Hua-Kostant-Schmid-Kobayashiの公式等、既に知られている多くの重複度が1の結果は一様に説明された。また、重複度1になるような分岐則の様々な新しい設定も得られている。

では、KirillovやKostantによって導入された軌道法の定理公式、とりわけ 表題にある**Corwin-Greenleaf 重複度関数** に目を向けてみよう。その為にまず、リー群のユニタリ表現論における軌道法について触れる([7])。

$\mathfrak{g}$ をリー群 G のリー環とし $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対とする。G の随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の反傾表現 $\mathrm{Ad}^*: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ を考える。この非ユニタリ有限次元表現はしばしば、ユニタリ双対 $\widehat{G}$(G がコンパクトでないならばユニタリ表現は一般に無限次元)と驚くほど密接な関係を持つ。$\mathfrak{g}^*$ に次のような同値関係を定義する。

$$\lambda \sim \mu \Leftrightarrow \mathrm{Ad}^*(g)\lambda = \mu \quad (g \in G).$$

この同値類のなす集合を余随伴軌道の集合と呼び、$\mathfrak{g}^*/G$ で表す。

例えば $G = \mathbb{R}^n$ とすると $\mathfrak{g}^*/G \simeq \mathbb{R}^n$ となり、$\widehat{G}$ と $\sqrt{-1}\mathfrak{g}^*/G \simeq \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ の間には自然な全単射ができる。可換群に関するこの例は Kirillov [2] によって 冪零リー群の場合に一般化された。すなわち、G を連結かつ単連結な冪零リー群としたとき、Kirillov 対応とよばれる 全単射

$$\widehat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*(G).$$

が得られる。

Kirillov の定理を指導原理として、Corwin と Greenleaf は誘導表現の既約分解や分岐則と余随伴軌道との関係について単連結な冪零リー群に限って研究した。これに関する概説詳細は論文[1]、また、この分野での最近の進展について書かれた Lipsman の論文 [10] などが詳しい。

この博士論文は簡約リー群の分岐則と軌道法の関係がテーマであり、より具体的には、小林俊行の「ユニタリ表現の分岐則における重複度1定理」が Kostant-Kirillov の軌道法において「予言」している「余随伴軌道の幾何」を明らかにすることである。残念ながら、軌道法について成功しているのは冪零リー群とその周辺に限られ、我々の関心の対象である「簡約リー群」については軌道法は十分に発達していない。とりあえず、定式化の参考にするために冪零リー群に関して既に知られていることを簡単に以下でまとめる。一言で言うと冪零リー群に関しては、Kirillov の余随伴軌道の枠組において、分岐則のスペクトラムと重複度 が G と H-軌道の言葉で決定できる。より詳しく言うと $\pi \in \widehat{G}$, $\nu \in H$ をとる。Kirillov の軌道法により $\mathcal{O}_\pi^G$、$\mathcal{O}_\nu^H$ をそれぞれ π 、

ν に対応する $\mathfrak{g}^*$ 、$\mathfrak{h}^*$ の余随伴軌道とする。$\mathrm{pr}:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ を自然な全射としたとき

$$(2)\qquad n_\pi(\nu)=\sharp\big(\mathcal{O}_\pi^G\cap\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_\nu^H)\big)\text{内の}\,\mathrm{Ad}^*(H)\text{-軌道}\big),$$

を "mod H" 交叉数と定義する。この数は *Corwin-Greenleaf* の軌道積分の公式中の **Corwin-Greenleaf 重複度関数**として知られている。軌道法が期待するものは二つの等式が一致することである。: 一つはユニタリ表現の分岐則からきたもの(1) で、もう一つは余随伴軌道の幾何からきたもの(2) つまり、

$$(3)\qquad m_\pi(\nu)=n_\pi(\nu).$$

である。Corwin と Greenleaf は G が冪零リー環ならば(3) が正しいということを証明した。G が簡約リー群の場合にこの**重複度関数**がこの博士論文の焦点となる。

さて、軌道法は冪零リー群にはとても強力だが、簡約リー群に対してはそんなにぴったりとはいかない事は良く知られている。しかし、簡約リー群の分岐則の重複度 *1* 定理 ([5], [6]) の「軌道法」における対応物として余随伴軌道の幾何に関する一般的な予想 (後述) を小林先生は得た。その典型的な場合は次のものである:

予想 1. (G,H) を簡約対称対とする。このとき、後に説明するある条件下のもとで

$$\sharp\big(\mathcal{O}_\pi^G\cap\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_\nu^H)\text{ 内の }\mathrm{Ad}^*(H)\text{-軌道}\big)\le 1.$$

となる。

主結果のステートメント

G を有限な中心を持つ非コンパクト単純リー群とし、Cartan 対合を θ、極大コンパクト群を $K:=\{g\in G|\theta g=g\}$、リー環を $\mathfrak{g}$ とする。Cartan 対合 θ に対応する Cartan 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ とする。さらに G はエルミート型であると仮定する。これは対応するリーマン対称空間 G/K が複素有界対称領域であることを意味する。群論の言葉では、これは $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ が非自明であると言うのと同値である。さらに、$\dim\mathfrak{c}(\mathfrak{k})=1$ かつ $\mathrm{ad}\,z|_{\mathfrak{p}},\ z\in\mathfrak{c}(\mathfrak{k})\backslash\{0\}$ は全て正則であることが知られている。

例. エルミート型の単純リー環は次のように分類される。

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\ \mathfrak{su}(p,q),\ \mathfrak{so}^*(2n),\ \mathfrak{so}(2,n),\ \mathfrak{e}_{6(-14)},\ \mathfrak{e}_{7(-25)}.$$

今、G は簡約リー群であるから、$\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}(G)$-不変な非退化双線型形式 (例えば $\mathfrak{g}$ が半単純なら Killing 形式) によって得られる全単射 $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}^*$ を通して、随伴表現 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は反傾表現 $\mathrm{Ad}^*:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ と同型である。それゆえ、随伴軌道を余随伴軌道と同一視できる。特に実簡約リー群の任意の随伴軌道には余随伴軌道上の G-不変シンプレクティック形式から導入された G-不変シンプレクティック形式が定まる。

では、ゼロでない元 $z \in \mathfrak{c}(\mathfrak{k})$ に対し、軌道

$$\mathcal{O}_z^G := \mathrm{Ad}(G)\,z \subset \mathfrak{g}.$$

を考える。さらに全射 $\mathrm{pr}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ を考える。このとき引き戻し $\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_y^H) \quad (y \in \mathfrak{h})$ は $\mathrm{Ad}(H)$-不変である。すると、予想 1 をより簡単な次の同値な形に書き直すことが出来る。

予想 2. G をエルミート型とし、(G, H) を対称対とする。このとき任意の $y \in \mathrm{pr}(\mathcal{O}_z^G)$, に対し、

$$\sharp\big(\mathcal{O}_z^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_y^H)/\,\mathrm{Ad}(H)\big) \leq 1.$$

である。すなわち $\mathcal{O}_z^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_y^H)$ は空集合でなければ H の単一軌道である。

例 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, または $\mathrm{SU}(2)$、$H = K = \mathrm{SO}(2)$ とする。X を $\mathfrak{k}$ の中心の元とする。このとき任意の $y \in \mathrm{pr}(\mathcal{O}_X^G)$ に対し

$$O_X^G \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_y^H) = \text{ 円周 } = \mathrm{SO}(2)\text{-軌道}.$$

というものである。

私の博士論文で私は上のリーマン対称対内に対して再定式化した予想 2 を証明した。主結果は次のようなものである。

定理 小林の予想は (G, H) がリーマン対称対ならば真である。

得られた結果に対する感想

私は定理を軌道法の幾何に基づき証明した。これは (無限次元の) ユニタリ表現の定理に動機づけられている。ユニタリ表現論は非常に不可思議な現象により関連分野の研究に新しい方向性を導くことがある。軌道法は それらの "橋" の役割を果たすだろう。

Kirillov と Kostant により開拓された軌道法は 物理学における "量子化" のアナロジにより既約ユニタリ表現を構成しようとする。このアナロジと希望的観測を次の図でまとめてみる。

$$\begin{array}{ccc} \text{ユニタリ表現} & \longleftrightarrow & \text{量子物理学系} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{余随伴軌道} & \longleftrightarrow & \text{古典物理系} \end{array}$$

右側の縦の矢印は "量子化" である。この世が存在するからそれも存在するだろう。 そして量子力学的である。左側の縦の矢印は希望的観測の部分である。右側とのアナロジから存在すると思われる。(重複度の無い) 分岐則に対し "ユニタリ表現" の側の最近の発展はあるが、"余随伴軌道" 側の発展はほとんど知られていない。**Corwin-Greenleaf の重複度関数**における小林の予想は この空白部分を埋めてくれることだろう。さらに、リーマン対称対 の場合は私の結果は、例え

ば 明示的な分岐則での新しい 情報など、"ユニタリ表現" 側へフィードバックを与えてくれる望みが高いことを示唆している。

References

[1] Greenleaf, F. P., *Harmonic analysis on nilpotent homogeneous spaces*, Contemporary Math. **177** (1994), 1-26.

[2] Kirillov, A., *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russian Math. Surveys **4** (1962), 53-104.

[3] Kobayashi, T., 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論, 数学, **46** (1994), 124–143, 日本数学会; Harmonic analysis and representation theory on reductive homogeneous spaces, Translation Series II, Amer. Math. Soc., **183** (1998), 1–31.

[4] ———, *Discrete decomposibility of the restrictions of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications*, Part I, Invent. Math. **117** (1994), 181-205; Part II, Ann. of Math. **147** (1998), 1-21; Part III, Invent. Math. **131** (1998), 229-256.

[5] ———, *Multiplicity-free branching laws for unitary highest weight modules*, Proceedings of the Symposium on Representation Theory held at Saga, Kyushu 1997 (K. Mimachi, ed.), **197**, pp. 9-17.

[6] ———, *Multiplicity-free restrictions of unitary highest weight modules for reductive symmetric pairs*, preprint.

[7] ———, 半単純リー群のユニタリ表現の離散的分岐則の理論とその展開, 数学, **51**, (1999), 337–356, 日本数学会; *Theory of discrete decomposible branching laws of unitary representations of semisimple Lie groups and some applications*, Sugaku Exposition, Transl. Ser., Amer. Math. Soc. (to appear).

[8] Koecher, M. *Jordan algebras and their applications*, mimeographical notes, University of Minnesota, 1962.

[9] Korány, A., Wolf, J., A., *Realization of Hermitian Symmetric Spaces as Generalized Half-planes*, Ann. Math. **81** (1965), 265-288.

[10] Lipsman, R., *Attributes and applications of the Corwin-Greenleaf multiplicity function*, Contemporary Math. **177** (1994), 27-46.

[11] Vogan, D., Jr., *Representations of real reductive Lie Groups*, Progress in Math. Birkhäuser, 1981.

[12] ———, *Unitary Representations of Reductive Lie Groups*, Ann. Math. stud. **118**, Princeton U. P., 1987.