

論文審査の結果の要旨

氏名 Salma Nasrin

群の表現論においては、常に幾何学的な側面がその背景にあった。有限群で、その既約表現の同値類と群の共役類とが 1 対 1 に対応していることは、必ずしも直接的な対応がないのにも関わらず、極めて重要な事実である。リー群の表現論においては、リー群が多様体であるため、より幾何学的な考察がなされて来た。リー群 G は、そのリー環 \mathfrak{g} に随伴表現として自然に作用するので、リー環の相対空間 \mathfrak{g}^* にも自然に作用している。この作用による軌道は G の余随伴軌道と呼ばれるが、リー群 G の既約ユニタリ表現と、この余随伴軌道とに対応がある、という原理がある。

リー群 G がベキ零リー群のときは、これは完璧に正しく、それは Kirillov 対応として知られている。すなわち、ベキ零リー群の既約ユニタリ表現は、余随伴軌道の「量子化」という手続きによってすべて構成される。

さて、表現論において、部分群からの表現の誘導と部分群への表現の制限という基本的問題があるが、無限次元表現の制限については、その重要性にもかかわらず解析的な困難が伴うため、最近まで大きな発展はなかった。これに対し、近年、小林俊行により、簡約リー群の既約表現に対し、その簡約閉部分群への制限の理論がめざましく進展し、離散的な和に制限が分解するための条件が調べられ、あるいはさらに強く、最も望ましい「重複度 1 で離散的に分解する」ための一般的な条件が得られている。

ベキ零リー群の場合は、その表現が余随伴軌道に対応しているので、部分群に制限した場合に、表現が重複度 1 で分解するための条件が幾何学的に記述されることが期待できる。実際、大きな群 G の表現 π を閉部分群 H に制限したときに現れる H の表現 ν の重複度は、幾何学的に定義される Corwin-Greenleaf 関数の値に一致することが知られている。 G のリー環の相対空間 \mathfrak{g}^* から、 H のリー環の相対空間 \mathfrak{h}^* へは自然な射影 pr があるが、 ν に対応する H の余随伴軌道の pr での引き戻しと π に対する G の余随伴軌道との交わりが、いくつの H の軌道に分かれるか、という数が Corwin-Greenleaf 関数の値である。

Lie 群の表現論においてもっとも興味深い簡約リー群の場合は、その既約ユニタリ表現の全体については、解明されていない部分が多く、また随伴軌道とも必ずしもうまく対応していない。Wallach 予想に関連して、 G と H が簡約対称対の場合に、エルミート型リー群 G の最高ウェイト表現の、 H への制限が重複度 1 で分解することを小林俊行が示した。簡約リー環は、その相対空間と自然に同一視されるが、この最高ウェイト表現は、 G の極大コンパクトリー群 K のリー環の中心の元 z を通る随伴軌道と同一視されるので、幾何学的対応物として、 z の G -軌道に対し、それが H の随伴軌道の引き戻しと交わっていれば、その交わりが一つの H -軌道になることが期待され、実際それは小林俊行により予想された。

この幾何学的な予想は、簡約リー群の表現とそれの余随伴軌道との関連が明確でないので、ベキ零リー群の場合のように意味は明らかでないが、逆にリー群の作用に関する幾何学に新しい観点を与えるものと考えられる。論文提出者 Salma Nasrin は、提出論文において H が G の極大コンパクト群の場合にこの予想を解決した。

具体的には、 G として古典型の $Sp(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$, $SO^*(2n)$, $SO(2, n)$ の4つと、例外型の E_{III} および E_{VI} の全ての場合にこの予想が成立することを示す必要がある。 G の Cartan 分解 $G = KAK$ において、 A は制限 Weyl 群の基本領域 A_+ に変更して $G = KA_+K$ が成立するが、この予想を「 $a, a' \in A_+$ に対し、 $pr(\text{Ad}(a)z)$ と $pr(\text{Ad}(a')z)$ が同じ K -軌道に属するならば、 $a = a'$ である」という命題に帰着して証明した。この命題を示すには、 $pr(\text{Ad}(a)z)$ を具体的に計算する必要があり、特に例外型では難しいが、Salma Nasrin は、巧みに $SL(2, \mathbb{C})$ へのリダクションを用いることによって全ての場合に証明することができた。

この結果は、小林俊行の予想が、部分群がコンパクトの場合の解決を与えたと共に、コンパクトとは限らない場合も含めた予想の完全解決の端緒となることが期待される。また上記の結果はそれ自体が興味あるのみならず、今後もリー群の表現論に起因するリー群の新しい幾何学的研究への発展に繋がっていくことも考えられ、論文の内容は高く評価できる。

よって、論文提出 Salma Nasrin は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。