論文内容の要旨

Exponential Calculus of Pseudodifferential Operators of Minimum Type (ミニマム型擬微分作用素の指数解析)

李 昌勲

擬微分作用素とは微分作用素を余接束上で局所化した概念である。この論文では擬微分作用素を余接束上で定義された関数の同値類として定義する。この関数を擬微分作用素の表象(symbol)という。擬微分作用素の和、積等の演算は表象を用いて表現することができ、このことによって擬微分作用素を具体的に取り扱うことが可能となる。表象を用いて擬微分作用素同士の演算を記述することを symbolic calculus という。題目の exponential calculus とは指数関数表象の形で表現される解析的擬微分作用素についての symbolic calculus を意味する。ここで指数関数表象とは文字通りその表象が指数関数の形になっているものである。通常の解析的擬微分作用素に対する指数解析は青木によって見事な形で完成されているが、この論文ではある種の直積構造を考慮した場合を考える。すなわち、直積型またはミニマム型解析的擬微分作用素に関する指数解析に対し青木の理論を拡張する。このような形の表象により定まる作用素を研究する主たる目的は、片岡による超関数論におけるエネルギー法に使われる正定値無限階擬微分作用素の指数解析などに応用されることにある。この論文は大きく二つの部分で構成されている。以下その1部と2部の内容につい

て述べる。

第1部ではまず、$T^*(\mathbb{C}_z^n)\times T^*(\mathbb{C}_w^m)$ における直積型の表象の空間を定義し、青木の形式表象の理論をこの場合に拡張する。さらにその特殊な場合としてミニマム型表象をつぎのように定義する。
Ω,Ω' をそれぞれ余接束 $T^*(\mathbb{C}_z^n\times\mathbb{C}_w^m)$ の錐状開集合とする。
$\Omega(r):=\Omega\cap\{|\xi|>r\}$, $\Omega'(r'):=\Omega'\cap\{|\eta|>r'\}$ とする。$\Lambda_1(|\xi|),\Lambda_2(|\eta|)$ はそれぞれ $|\xi|,|\eta|$ の劣線形 (infra-linear) 関数とする。
(定義) $p(z,\xi,w,\eta)$ を $\Omega\times\Omega'$ 上、増大度 (Λ_1,Λ_2) のミニマム型であるとは次を満たすときである。

1. $p(z,\xi,w,\eta)$ は ある $r,r'>0$ に対して $\Omega(r)\times\Omega'(r')$ 上、正則である。
2. ある $C_p>0$ が存在して $\Omega(r)\times\Omega'(r')$ 上、

$$|p(z,\xi,w,\eta)|\le C_p\min\{\Lambda_1(|\xi|),\Lambda_2(|\eta|)\}$$

が成り立つ。

(定理1) $p(z,\xi,w,\eta)$, $q(z,\xi,w,\eta)$ が $\Omega\times\Omega'$ 上、ミニマム型表象であるとき、つぎを満たすミニマム型形式表象 $r(s,t;z,\xi,w,\eta)$ が存在する。

$$:\exp(p(z,\xi,w,\eta)) :\,:\exp(q(z,\xi,w,\eta)) :=: \exp(r(s,t;z,\xi,w,\eta)) : .$$

ここで、$:\exp(p(z,\xi,w,\eta)) :\,:\exp(q(z,\xi,w,\eta)) :$
$=: e^{s<\partial_\xi,\partial_{z^*}>+t<\partial_\eta,\partial_{w^*}>}\exp(p(z,\xi,w,\eta)+q(z^*,\xi^*,w^*,\eta^*))\Big|_{(z^*,\xi^*,w^*,\eta^*)=(z,\xi,w,\eta)} :$

第2部では1部の指数解析を議論する。
(定理2) p が増大度 (Λ_1,Λ_2) のミニマム型形式表象であるとき、$e^{:p:}$ が $e^{(\Lambda_1,\Lambda_2)}$ 型形式表象に対応する直積型擬微分作用素になる。
(定理3)p がミニマム型形式表象であるとき、$e^{:p:} =: e^q :$ を満たすミニマム型形式表象 q が存在する。
(定理4) q がミニマム型形式表象であるとき、$e^{:p:} =: e^q :$ を満たすミニマム型形式表象 p が存在する。
結論的に $:e^p:$ の逆が $:e^q:$ の 形で実現されることを示す。