論文審査の結果の要旨

氏名　　李　昌勳

本論文提出者は，ミニマム型擬微分作用素の指数解析に関する研究をおこなった。1階未満の解析的擬微分作用素，例えば $P(x,\partial_x)=(-\Delta_x)^\theta$ $(0<\theta<1/2)$ などの指数関数

$$\exp(P(x,\partial_x))$$

またはその形式表象の指数関数を表象とする擬微分作用素

$$:\exp(P(x,\xi)):$$

は，佐藤超関数やウルトラ超分布に(超局所的に) 作用する演算子であるがいわゆる無限階の作用素も含むので一般的にはあまり研究されてはこなかった。しかし１９８０年代に近畿大学の青木貴史によりその指数解析，すなわちこのような作用素全体が擬微分作用素としての積により群をなすことが証明された。また同時に上の2つの作用素の表示の間の関係も示された。すなわち作用素の指数関数の表象はある1階未満の表象の指数関数で書けること，またその逆も成立することが示された。後者は指数表象で表される作用素に対して作用素としての対数がとれることを意味している。証明は結合や逆元の指数部分の表象の漸近展開を実際に漸化式で陽に与え，増大度を漸化不等式を使って評価し，やはり1階未満の解析的擬微分作用素になることを示す，という極めて直接的な方法である。これは有限次元の場合，正方行列の指数関数に関する Hausdorff-Young の公式に相当するものであるが格段に複雑であり漸化式の導出，漸化不等式の解析には極めて独創的なアイデアが必要とされた。

論文提出者の目的はこの理論を通常の解析的擬微分作用素ではなくある種の直積構造をもった解析的擬微分作用素に対して拡張することである。すなわち多様体が2つの複素多様体 X,Yの直積 $X\times Y$ となっているときを考える。X,Y の局所複素座標をそれぞれ $z=(z_1,...,z_n),w=(w_1,...,w_m)$ で表しその余接バンドル T^*X,T^*Y の座標を $(z,\xi),(w,\eta)$ で表すとき $X\times Y$ 上の擬微分作用素は $T^*(X\times Y)=T^*X\times T^*Y$ 上のある種の解析関数のクラス $:P(z,w,\xi,\eta):$（表象）で表される。すなわち $P(z,w,\xi,\eta)$ は $T^*(X\times Y)$ のいわゆる錐状開集合で定義された解析関数で $|\xi|+|\eta|\to+\infty$ のとき劣指数的増大度

$$|P(z,w,\xi,\eta)|\le C_\varepsilon\exp(\varepsilon(|\xi|+|\eta|))\quad(\forall\varepsilon>0)$$

を持つものである。このとき直積構造を考慮するとはまず定義域が直積型であること，すなわち V,W をそれぞれ T^*X,T^*Y の錐状開集合とするとき $P(z,w,\xi,\eta)$ は $V\times W$ の形の定義域をもちさらにそこにおいて上の評価式を満たすものとする。ここで厄介なことは無限大になる方向が独立に2つあること（ $|\xi|,|\eta|$ ）である。このため例え 0 階といわれる表象でも

$$\xi_1/\eta_1$$

のような作用素は $|\xi|>1,|\eta|>1$ で考えても有界とならず解析が難しい。これに対し

$$\xi\eta/(\xi^2+\eta^2)$$

のような作用素は V,W を適当にとれば有界となり扱いがやさしい。また非有界な表象についても片岡清臣が1985年頃佐藤超関数に対する解析的エネルギー法の理論で使ったエルミート半正定値な表象のうちミニマム型と呼ばれるものは

$$(\xi\bar{\eta})^\theta/\sqrt{\xi^2+\bar{\eta}^2} \quad (1/2<\theta<1)$$

のようにいわゆるミニマム型評価

$$|P(z,w,\xi,\eta)|\leq C\min\{|\xi|^\kappa,|\eta|^\kappa\} \quad (0<\kappa=2\theta-1<1)$$

を満たし，２つの無限大の方向からくる難しさを回避できる。片岡はこのような作用素の指数関数がエネルギー法の定式化に欠かせないことを示したが論文提出者はこのミニマム型作用素をエルミート正定値性とは離れて独立に考え，その指数解析の一般論を展開した。すなわちミニマム型表象を指数の肩にもつような解析的擬微分作用素に対しても青木型の定理がすべて成立することを示した。

証明はほぼ青木理論どおりにいく箇所が多いが変数が２倍になることにより一層議論が複雑になりかなりの努力とアイデアが必要とされる。またミニマムタイプということをフルに使って証明をうまく変更しないと通用しない箇所が多く，論文提出者の寄与は十分評価できる。また片岡が考察していたのは $0<\kappa<1/2$ の場合だけであるが増大度が1に近づくにつれ議論は格段に複雑になる。しかし論文提出者の方法によればまったく一般の場合で通用し，この点で結果としても新しく今後の発展も期待できる。

よって, 論文提出者　李　昌勳 は, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。