論文の内容の要旨

論文題目　Filtering Problem and Large Deviations
フィルタリング問題と大偏差原理

氏　　名　　　　劉 京軍　　(LIU Jingjun)

本論文では, 確率論に関連する２つの話題を取りあげている. 最初に, ファルタリング問題で Dirichelet 境界条件をもつ系過程に対する問題を考察し, その条件付き分布の密度関数の存在と滑らかさに関する十分条件を与える. 次に, 大偏差原理の精密評価について研究した. マルコフ連鎖とマルコフ過程に対する, それぞれ精密評価の問題を考えた.

1. 部分マリアヴァン解析の Dirichelet 境界条件を付きフィルタリング問題へ応用

$T > 0$ をある有限定数, $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ をある完備な確率空間とする. また, (B_t, W_t) を独立な $d_1 + d_2$-次元ブラウン運動とする. 次で与えられるフィルタリングモデルを考える. $X_t = (X_t^0, X_t^1)$ と Y_t は次の確率微分方程式の解とする

$$\begin{cases} dX_t^0 = dB_t^1 + b_0(X_t)dt, \\ dX_t^1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{d_1} V_j(X_t) \circ dB_t^j + V_0(X_t)dt, \quad X_0 = (x_0, x') \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^N, \\ dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + b_1(X_t, Y_t)dt, \quad Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^M. \end{cases}$$

ただし, $b_0 : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}, \sigma : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M \otimes \mathbf{R}^{d_2}, b_1 : \mathbf{R}^{N+1} \otimes \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ は有界で滑らな関数とする. $V_k^i \in C_b^\infty(\mathbf{R}^{N+1})$ とする, $V_0, V_2, \cdots, V_{d_1} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{R}^N)$ はベクトル場とする. ここで, V_k は $\sum_{i=1}^{N} V_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ のよう

なものである．特に, $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$ とする，$a(x)$ は一様楕円条件を満たす (即ち $a(x) \geq \varepsilon I_M$, ただし，$\varepsilon > 0$ はあるで定数, I_M は M-次元単位行列). とすると，$\sigma^{-1}(x)$ が存在し，有界である．

ここで, 非負値ランダム時刻 τ を $\tau = \inf\{t > 0 : X_t^0 = 0\}$ と定義する．ただし，$\inf_{t\in[0,T]} X_t > 0$ の時は, $\tau = +\infty$ とおくことにする．また右連続フィルトレーション $(\mathcal{G}_t^Y)$ は過程 Y_t が生成するとする, 即ち $\mathcal{G}_t^Y = \bigcap_{t<u} \sigma(Y_s, s \leq u)$ とする．以下を仮定する $V_k^1 = 1, k = 1; V_k^1 = 0, 2 \leq k \leq d_1$. $\mathcal{C}_0 = \{V_2, \cdots, V_d\}$ とする． $l \geq 1$ に対して, $\mathcal{C}_l = \{[V, V_k] : 1 \leq k \leq d, V \in \mathcal{C}_{l-1}\} \bigcup \{[V, V_0] : V \in \mathcal{C}_{l-1}\}$ と定義する． 非退化条件は以下のものである．ある正数 $l_0 \geq 0$ と $\varepsilon > 0$ を存在して,

$$\sum_{l=0}^{l_0} \sum_{V\in\mathcal{C}_l} (V(x), \eta)_{\mathbf{R}^N}^2 \geq \varepsilon |\eta|_{\mathbf{R}^N}^2 \quad x \in \mathbf{R}^{N+1}, \eta \in \mathbf{R}^N,$$

ただし，$\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_N)$ ．以上の設定の下で次の問題を考える．条件確率分布 $P(X_t \in dx, \tau > t|\mathcal{G}^Y)$ に対する，密度関数の存在と滑らかさを考察する．主結果は次の定理である．

定理 1 非退化条件を仮定する, ある $\mathcal{B}_{(0,\infty)} \times \mathcal{B}_{(0,\infty)\otimes\mathbf{R}^N} \times \mathcal{G}_t^Y$ 可測関数 $p(t, x, \omega) : (t, x, \omega) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times R^N \times \Omega \to [0, \infty)$ が存在し，次の結論が成り立つ．

(1) $t \in (0, \infty)$ に対して, $x \mapsto p(t, x, \omega)$ は $\mathcal{B}_{(0,\infty)\otimes\mathbf{R}^N} \times \mathcal{G}_t^Y$ 可測.

(2) $(t, x, \omega) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbf{R}^N \times \Omega$ に対して, $P(X_t \in dx, \tau > t|\mathcal{G}_t^Y) = p(t, x, \omega)dx$, P-a.e. が成立する． 即ち，任意の $\mathcal{B}([0, \infty) \times \mathbf{R}^N)$ 可測関数 f に対して，$E[f(X_t), \tau > t|\mathcal{G}_t^Y] = \int_{(0,\infty)\times\mathbf{R}^N} f(x)p(t, x, \omega)dx$ が成立をする．

(3) $(t, x^0, \omega) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times \Omega$ に対して, $x' \in \mathbf{R}^N \mapsto p(t, x, \omega)$ は C^∞ 級関数；

(4) $(t, x', \omega) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^N \times \Omega$ に対して，$x^0 \in (0, \infty) \mapsto \partial_{x'}^\alpha p(t, x^0, x', \omega)$ は連続微分可能. 任意の $\delta \in (0, 1)$ に対して, 導関数 $\partial_{x_0}\partial_{x'}^\alpha p(t, x^0, x', \omega)$ は $L^{2-\delta}(\Omega)$ で Hölder 連続. *i.e.* $(t, z', \omega) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^N \times \Omega$ に対して，$z \mapsto \partial_{x'}^\alpha p(t, z, z', \omega)$ は C^1-関数． また，任意の $0 < \lambda < 1$, $k \geq 2, T_0 \leq t \leq T$ に対して,

$$\sup_{0<a<b<k, z'\in\mathbf{R}^N} \left\{ E\left[\left| \frac{1}{(b-a)^\lambda} \left(\partial_z \partial_{x'}^\alpha p_t(b, z', \omega) - \partial_z \partial_{x'}^\alpha p_t(a, z', \omega) \right) \right|^{2-\delta} \right] \right\}$$

は有限である.

2. 大偏差原理 Laplace 近似の精密評価

E はコンパクト距離空間，$\mathcal{E}$ はボレル σ-代数，$C(E)$ は E から $\mathbf{R}$ への連続関数全体の集合とし、一様ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E}|f(x)|$ ともつバナッハ空間である．$\mathbf{N}$ で非負な整数とし，$\Omega \equiv E^{\mathbf{N}}$ とする．$n \geq 0$ に対して，$X_n : \Omega \to E$ は $X_n(\omega) = \omega(n)$ が定義された．$\mathcal{F}$ は Ω 上 $\{X_n(\omega)\}_{n\geq 0}$ が生成する σ-代数 $\mathcal{F}_k^h$ は $\{X_j\}_{k\leq j\leq h}$ により生成される子-σ-代数である．$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}, \{X_n\}, P_x)$ は出発点を x とする，推移確率 $\Pi(x, dy)$ を持つ斉次のマルコフ連鎖．Π は $\Pi f(x) = \int_E f(y)\Pi(x, dy)$ と定義する．次を仮定する．

A.1 ある $\mathrm{supp}\mu = E$ を持つ Π-不変測度 $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ が存在して，正の連続関数 $\pi : E \times E \to (0, \infty)$ が存在して，$\Pi(x, dy) = \pi(x, y)\mu(dy)$ を満たす．

$L_n : \Omega \to \mathcal{M}_1(E), n \geq 1$ は経験測度とする，即ち，$L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{X_k}$. 仮定 (A.1) から，$\{L_n, n \geq 1\}$ 大偏差定理が成り立つ，レート関数 $J : \mathcal{M}_1 \to [0, \infty]$ は次に定義される

$$J(\nu) = \sup\left\{-\int_E \log\frac{\Pi u}{u} d\nu, u \in C(E), u \geq 1\right\}, \quad \nu \in \mathcal{M}_1(E).$$

A.2 $\Phi : \mathcal{M}(E) \to \mathbf{R}$ は 3 回連続 Fréchet 微分可能な関数で，Fréchet 微分は連続関数 $\Phi^{(i)}(\nu; x_1, \cdots, x_i), i = 1, 2, 3$ に関する積分で表わせる．

Donsker-Varadhan の定理より，任意の $x \in E$ に対して

$$b_\Phi = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log E^{P_x}\left[\exp\left(n\Phi(L_n)\right)\right] = \sup\{\Phi(\nu) - J(\nu) : \nu \in \mathcal{M}_1(E)\}$$

が成立する．$K_\Phi \equiv \{\nu \in \mathcal{M}_1(E) : \Phi(\nu) - J(\nu) = b_\Phi\}$. とする．$K_\Phi$ は $\mathcal{M}_1(E)$ 上空でなくコンパクト集合である．次の仮定をする，

A.3 K_Φ は唯一つの元 ν_0 をもつ． 即ち $K_\Phi = \{\nu_0\}$.

任意の $V \in C(E)$ に対して，作用素 Π^V が $\Pi^V f(x) = e^{V(x)}\int_E \Pi(x, dy)f(y), f \in C(E)$ と定義する．Feynman-Kac 公式が成り立つ

$$(\Pi^V)^n f(x) = E^{P_x}\left[f(X_n)\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}V(X_k)\right)\right], \quad f \in C(E).$$

$\Lambda(V)$ は次に定義された Π^V の対数スペクトル半径，$|\Lambda(V)| \leq \|V\|_\infty$ が成り立つ． 任意の $n \geq 1$ に対して，$\exp(\Lambda(V)n)$ は $(\Pi^V)^n$ のスペクトル半径である，$\Lambda(V) = \sup\left\{\int_E V(x)\nu(dx) - J(\nu) : \nu \in \mathcal{M}_1(E)\right\}$ が成立する．

仮定 A.1 から，Π^V は正の核 $\pi^V = e^{V(x)}\pi(x, y)$ を持つコンパクト作用素である．Perron-Frobinus 定理よって，正の関数 $h^V \in C(E)$ が存在して，次が成り立つ $e^{-\Lambda(V)}\Pi^V h^V = h^V$. すべての $x \in E, n \in \mathbf{N}$，$A \in \mathcal{F}_n$ 対して，Kolmogorov 拡張定理より $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度族 Q_x^V を次ように定義する

$$Q_x^V(A) = \frac{e^{-n\Lambda(V)}}{h^V(x)}E^{P_x}\left[1_A h^V(X_n)\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}V(X_k)\right)\right].$$

Q^V は Q_x^V に対応する $C(E)$ 上の有界線形作用素．すなわち，$Q^V f(x) = E^{Q_x^V}[f(X_1)]$．同様に Q^V は μ に対して，正の連続推移密度関数 $\tilde{q}^V$ を持つことがわかる．次で不変測度 ν_0 を持つマルコフ連鎖が構成する.$V^{\nu_0} = D\Phi(\nu_0)(\delta_x - \nu_0) + \Phi(\nu_0)$ とする．h は唯一の正規な $\Pi^{V^{\nu_0}}$ の特性関数．$b_\Phi = \Lambda(V^{\nu_0})$ と ν_0 は $(Q_x^{V^{\nu_0}})$ の不変測度である．Q は $\{Q_x\}_{x\in E}$ に対応する $C(E)$ 上の作用素．ν_0 は Q の不変測度になり，Q は ν_0 に関する正の密度関数 $q(x,y)$ を持つ，すべての x に対して，$n\to\infty$ の時，$q_n(x,y)$ が $\|q_n(x,\cdot)-1\|_\infty \to 0$ 指数的収束する．ただし，$q_n(x,y)$ は次のように定義される $q_1(x,y) = q(x,y), q_{n+1}(x,y) = \int q(x,z)q_n(z,y)\nu_0(dz), n\geq 1$．$g(x,y)\in C(E\times E)$ を $g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(q_n(x,y)-1)$ とする．すべての $f\in C(E)$ に対して，線形作用素 $G, G^*, P, \overline{G}$ を次のように定義する．$G: C(E)\to C(E)$ を $Gf(x) = \int_E g(x,y)f(y)\nu_0(dy)$，$G^*f(x) = \int_E g(y,x)f(y)\nu_0(dy)$，$\overline{G} = P + G + G^*$，$Pf(x) = f(x) - \int_E f d\nu_0$.

$B(f,g)\equiv \int_E f\overline{G}g d\nu_0, f,g\in C(E)$，$V_0 = \{f\in C(E) : B(f,f) = 0\}$ と $\widetilde{C}(E) = C(E)/V_0$ とする．B は $\widetilde{C}(E)$ 上内積となる．$\widetilde{H}$ は $\widetilde{C}(E)$ の B に関する完備化を表す．H は $\widetilde{H}$ の双対空間とする，このとき，H はノルム $\|\overline{G}fd\nu_0\|_H^2 = \int_E f\overline{G}fd\nu_0$ を持つ $\mathcal{M}(E)$ の部分集合とみなせる．

また，$\int_E fd\nu_0 = 0$ を満たすすべての $f\in C(E)$ に対して

$$D^2\Phi(\nu_0)(\overline{G}fd\nu_0, \overline{G}fd\nu_0) \leq \langle f, \overline{G}f\rangle_{\nu_0}$$

である．次を仮定する

A.4 $D^2\Phi(\nu_0)\Big|_{H\times H}$ の固有値はすべて 1 より小さい．

A.5 任意の $\delta > 0$ に対して，定数 $\varepsilon > 0$ 及び対称な連続関数 $K_\delta : E\times E \to \mathbf{R}$ が存在して，関数 $K_\delta(x,y)$ が $\sup_{x,y}|K_\delta(x,y)|\leq \delta$, を満たすとする．このとき，$\widetilde{K}_\delta(R_1,R_2) \equiv \int_E\int_E K_\delta(x,y)R_1(dx)R_2(dy), R_1, R_2\in\mathcal{M}(E)$ と定義する．$R\in\mathcal{M}_1(E)$ $\nu\in\mathcal{M}_1(E)$，$dist(R,\nu_0) < \varepsilon$ $dist(\nu,\nu_0) < \varepsilon$ に対して，

$$\left|D^3\Phi(R)(\nu-\nu_0, \nu-\nu_0, \nu-\nu_0)\right| \leq \int_E\int_E K_\delta(x,y)(\nu-\nu_0)(dx)(\nu-\nu_0)(dy)$$

が成り立つとする．

次の結果がを得られた．

定理 2 A.1—A.5, を仮定する．この時，すべての $x,y\in E$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} e^{-nb_\Phi} E^{P_x}\left[\exp(n\Phi(L_n)) \,\middle|\, X_{n-1} = y\right] \\
= &\frac{h(x)}{h(y)}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int_E \Phi^{(2)}(\nu_0,u,u)\nu_0(du) + \int_E\int_E g(u,v)\Phi^{(2)}(\nu_0,u,v)\nu_0(du)\nu_0(dv)\right) \\
&\quad\times \det{}_2\left(I_H - D^2\Phi(\nu_0)\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

連続な場合は第 3 章で考察した．