論文審査の結果の要旨

氏名　劉京軍

本論文では、ディリクレ境界条件を持つ拡散過程を系過程とするフィルターリングの問題、及びマルコフ連鎖及びマルコフ過程に対する大偏差原理の Laplace 近似の精密評価についての研究を行っている。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$(B_t, W_t)_{t\in[0,\infty)}$ を $d+M$-次元ブラウン運動とする。$X_t = (X_t^0, X_t^1)$, Y_t を次の確率微分方程式の解とする。

$$\begin{cases} dX_t^0 &= dB_t^1 + b_0(X_t)dt, \\ dX_t' &= \sum_{j=2}^{d_1} V_j(X_t) \circ dB_t^j + V_0(X_t)dt, \\ dY_t &= \sigma(Y_t)dW_t + b_1(X_t, Y_t)dt, \end{cases}$$

$$X_0 = (x^0, x') \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^N, \qquad Y_0 = y_0 \in \mathbf{R}^M.$$

ただし、$b_0 : \mathbf{R}^{1+N} \to \mathbf{R}$, $\sigma : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M \otimes \mathbf{R}^M$, $b_1 : \mathbf{R}^{1+N} \otimes \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^M$ は有界で滑らかな関数、$V_0, V_2, \ldots, V_{d_1} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^{1+N}, \mathbf{R}^N)$ とする。ここで, V_k は微分作用素 $\sum_{i=1}^N V_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ と同一視し、 $\mathbf{R}^{1+N}$ 上のベクトル場と考える。さらに、σ は一様に非退化であると仮定する。フィルトレーション $\{\mathcal{G}_t^Y\}$ を $\mathcal{G}_t^Y = \bigcap_{t<u} \sigma\{Y_s, s \le u\}$ で定義する。さらに、非負値ランダム時刻 τ を $\tau = \inf\{t > 0 : X_t^0 = 0\}$ により定義する。

$P(X_t \in dx | \mathcal{G}_t^Y)$ を調べることはフィルターリングの基本的な問題である。これに対して、数理ファイナンスのデフォルトのモデルではフィルターリングモデルが提唱され、ディリクレ境界条件付きの条件付き確率 $P(X_t \in dx,\ \tau > t | \mathcal{G}_t^Y)$ の性質が問題となっている。

以下、さらに次のことを仮定する。

(仮定) $V_1 = \frac{\partial}{\partial x^0}$ とおき、$\mathcal{C}_0 = \{V_1, \ldots, V_d\}$ とする。$\ell \ge 1$ に対して, $\mathcal{C}_\ell = \{[V, V_k] : 1 \le k \le d, V \in \mathcal{C}_{\ell-1}\} \bigcup \{[V, V_0] : V \in \mathcal{C}_{\ell-1}\}$ と帰納的に定義する。この時、ある正数 $\ell_0 \ge 0$ と $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$\sum_{i=0}^{\ell_0} \sum_{V \in \mathcal{C}_i} (V(x), \eta)^2_{\mathbf{R}^{1+N}} \ge \varepsilon |\eta|^2_{\mathbf{R}^N} \quad x \in \mathbf{R}^{1+N}, \eta \in \mathbf{R}^{1+N}.$$

以上の設定の下で本論文では以下の定理が示されている。

定理　ある $\mathcal{B}_{(0,\infty)} \times \mathcal{B}_{(0,\infty)\otimes \mathbf{R}^N} \times \mathcal{G}_t^Y$ 可測関数 $p : (0,\infty) \times (0,\infty) \times R^N \times \Omega \to [0,\infty)$ が存在し、次が成り立つ。
(1) 各 $t > 0$ に対して, $P(X_t \in dx, \tau > t | \mathcal{G}_t^Y) = p(t,x,\omega)dx,\ P - a.e.$
(2) $(t, x^0, \omega) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \times \Omega$ に対して, $p(t, x^0, \cdot, \omega) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は滑らか。
(3) $(t, x', \omega) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^N \times \Omega$ に対して, $\partial_{x'}^{\alpha} p(t, \cdot, x', \omega) : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ は連続微分可能でその導関数は *Hölder* 連続。さらに、

$$E[\sup_{0<a<b<k, z' \in \mathbf{R}^N} |\frac{1}{(b-a)^{\lambda}}(\partial_z \partial_{x'}^{\alpha} p_t(b, z', \omega) - \partial_z \partial_{x'}^{\alpha} p_t(a, z', \omega))|^p\}] < \infty$$

がすべての $\lambda \in (0,1),\ k, p \in (1,\infty)$ に対して成立する。

これまで境界条件のない場合には同様の結果があったが、境界条件のある場合は初めてで証明方法も新しい。また、数理ファイナンスへの応用もあり、高く評価できる。
また、マルコフ連鎖及びマルコフ過程に対する大偏差原理の Laplace 近似の精密評価の研究においては、従来の 2 次の項に対する核型の仮定を弱め、ヒルベルトーシュミット型でも精密評価を与えることができることを示した。

以上のように本論文は独創性のあるきわめて質の高いもので、論文提出者 劉 京軍 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。