論文の内容の要旨

論文題目

WEIGHT-MONODROMY CONJECTURE FOR p-ADICALLY UNIFORMIZED VARIETIES

(p 進一意化を持つ多様体に対するウェイト・モノドロミー予想)

氏名　伊藤 哲史

ウェイト・モノドロミー予想 (weight-monodromy conjecture) とは，Deligne により 1970 年の国際数学者会議において提出された予想である ([D1])．これは，完備離散付値体上の固有かつ滑らかな代数多様体の l 進コホモロジーに定義されたモノドロミー・フィルトレーションの重み (weight) が純であるという予想として定式化されており，“Deligne によるモノドロミー・フィルトレーションの純性予想” とも呼ばれている．本論文の主結果は，Drinfeld 上半空間による p 進一意化を持つ代数多様体に対し，ウェイト・モノドロミー予想が成り立つ，ということである．

ウェイト・モノドロミー予想は，代数多様体が有限体上の曲線上の族から来ているときは，Deligne 自身によって Weil 予想の証明の中で解かれており ([D2])，一般の正標数の場合はこれから従う．また，複素数体 $\mathbb{C}$ 上では，Hodge 理論における対応物が単位円板上の Hodge 構造の退化の理論として研究され，Steenbrink, 斎藤盛彦氏によって示されている ([Sa])．K が混標数の場合も，曲線またはアーベル多様体の場合は Grothendieck により ([SGA7-I])，曲面の場合は Rapoport-Zink, de Jong らにより示されている ([RZ])．また，ある種の 3 次元代数多様体に対する結果もある (参考論文 [1])．しかし，予想の提出から 30 年以上経った今日でも，3 次元以上では一般には未解決である．

まず，ウェイト・モノドロミー予想について簡単に復習しよう．混標数の場合が問題なので，K を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とし，$\mathbb{F}_q$ をその剰余体とする．l を p と異なる素数とする．X を K 上の固有かつ滑らかな代数多様体とすると，l 進コホモロジー $V := H^w_{\text{ét}}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_l)$ には K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が連続的に作用する．完全系列

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \longrightarrow 1.$$

によって惰性群 I_K を定める．I_K の副 l 部分は，

$$t_l\colon I_K \ni \sigma \mapsto \left(\frac{\sigma(\pi^{1/l^m})}{\pi^{1/l^m}}\right)_m \in \varprojlim\{x \in \overline{K} \mid x^{l^m} = 1\} =: \mathbb{Z}_l(1),$$

によって $\mathbb{Z}_l(1)$ と同形である (π は K の素元，(1) は Tate 捻り)．Grothendieck のモノドロミー定理により，I_K の V への作用は準巾単である．これより I_K の開部分群 $J \subset I_K$ と，モノドロミー作用素と呼ばれる巾零写像 $N\colon V(1) \to V$ が存在し，各 $\sigma \in J$ に対して $\rho(\sigma) = \exp\left(t_l(\sigma)N\right)$ となることが分かる．N から V の**モノドロミー・フィル**

トレーションの $M_\bullet$ が次の条件をみたす唯一のフィルトレーションとして定まる．$M_\bullet$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用で安定な V の増大フィルトレーションであり，十分大きな k に関して $M_{-k}V=0$, $M_kV=V$，全ての k に対して $N\bigl(M_kV(1)\bigr)\subset M_{k-2}V$ を満たし，さらに，これから誘導される写像 $N^k\colon \mathrm{Gr}_k^MV(k)\to \mathrm{Gr}_{-k}^MV$ は同形である $(\mathrm{Gr}_k^MV:=M_kV/M_{k-1}V)$. $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ における像が $\overline{\mathbb{F}}_q\ni x\mapsto x^{1/q}\in\overline{\mathbb{F}}_q$ となるとき，σ を**幾何学的 Frobenius の持ち上げ**という．

予想 (ウェイト・モノドロミー予想)． $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を幾何学的 Frobenius の持ち上げとすると，全ての k に対して，σ の Gr_k^MV への作用の固有値は代数的整数であり，その全ての複素共役の複素絶対値は $q^{(k+w)/2}$ である．

X が良い還元を持てば，I_K の V への作用は自明で，この予想は X の $\mathbb{F}_q$ 上への還元に関する Weil 予想に他ならず，既に Deligne 自身によって示されている．従って，この予想は，X が良い還元を持たないときが本質的である．

次に，p 進一意化について説明しよう．これは，1960 年代初めに Tate により創始され，Raynaud, Mumford, Mustafin, 栗原氏らにより一般化・高次元化された理論である ([Mu], [K])．$\widehat{\Omega}_K^d$ を K 上の d 次元 **Drinfeld 上半空間**とする．これは，d 次元複素球体の p 進類似であり，**リジッド解析空間**として，射影空間 $\mathbb{P}_K^d$ からすべての K 上定義された超平面を除いた "補空間" として定義される．このとき，$\widehat{\Omega}_K^d$ には $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$ が自然に作用する．$\Gamma\subset\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$ を非自明な捩れ元を持たない離散部分群で，商 $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)/\Gamma$ が p 進位相に関してコンパクトなものとすると，リジッド解析空間としての商空間 "$\Gamma\backslash\widehat{\Omega}_K^d$" は K 上の滑らかな射影的代数多様体の構造を持つ．これを X_Γ で表す．

以下が本論文の主結果である．

定理 (論文 Theorem 1.2)． X_Γ に対してウェイト・モノドロミー予想が成立する．

混標数の場合，特に高次元では，ウェイト・モノドロミー予想の成り立つ非自明な例はあまり知られていなかったようである．本論文により，特殊な種類の代数多様体ではあるが，そのような例が一般次元で得られたことになる．

証明について述べよう．方針としては，Steenbrink, 斎藤盛彦氏による複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Hodge 理論版の証明を真似るのだが，l 進コホモロジーには偏極 Hodge 構造の良い類似が無いことが問題となる．本論文では，この困難を，$\widehat{\Omega}_K^d$ の形式的スキームとしてのモデル $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K}^d$ の特殊ファイバーを詳しく調べることで克服する．まず，形式的スキーム $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K}^d$ の構成法から，その特殊ファイバーの既約成分は全て互いに同形であり，それを B^d とおくと，B^d は $\mathbb{F}_q$ 上の射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^d$ の線形部分多様体に沿った具体的な爆発で得られることが分かる．これより，B^d の l 進コホモロジーは $\mathbb{Q}$-構造を持つ．さらに，爆発の具体的な様子や，B^d 上の例外因子の組み合わせ的状況を注意深く見ることで，これらの $\mathbb{Q}$-構造に対し偏極 Hodge 構造の類似が定義されることが分かる．すなわち，Grothendieck の **Hodge 標準予想**が B^d に対して成り立つのである．さて，$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K}^d$ の構成法から，X_Γ は

K の整数環 $\mathscr{O}_K$ 上の**半安定モデル** $\mathfrak{X}_\Gamma$ を持つ．$\mathfrak{X}_\Gamma$ に対して Rapoport-Zink の**ウェイト・スペクトル系列** ([RZ]) を適用することで，ウェイト・モノドロミー予想は，$\mathfrak{X}_\Gamma$ の特殊ファイバーのコホモロジーのある部分空間に定義された二次形式の非退化性を示すことに帰着される．この非退化性は，B^d に関する Hodge 標準予想を用いることで，$\mathbb{C}$ 上の場合と同様に示される．

本論文で得られた結果の応用として，X_Γ の局所ゼータ関数を表現論的な不変量で計算することができる．Schneider-Stuhler は，リジッド幾何学に表現論的手法を組み合わせて，Drinfeld 上半空間 $\widehat{\Omega}^d_K$ およびその商空間 X_Γ の l 進コホモロジーの半単純化を計算している ([SS])．この結果に，本論文で得られた X_Γ に対するウェイト・モノドロミー予想を組み合わせることで，l 進コホモロジーの半単純化から l 進コホモロジー自身が復元され，X_Γ の局所ゼータ関数 $\zeta(s, X_\Gamma)$ が計算できる．具体的には，以下の公式

$$\zeta(s, X_\Gamma) = (1 - q^{-s})^{\mu(\Gamma)\cdot(-1)^{d+1}} \cdot \prod_{k=0}^{d} \frac{1}{1 - q^{k-s}}$$

を得る (論文 Theorem 6.4)．ここで $\mu(\Gamma)$ は，Γ の自明な指標から誘導された $\mathrm{PGL}_{d+1}(K)$-表現の中での Steinberg 表現の重複度であり，ある種の保型形式の空間の次元とも解釈できる表現論的な不変量である．特に，$\zeta(s, X_\Gamma)$ は素数 l の取り方によらない．また，他の応用として，ウェイト・スペクトル系列が $\mathbb{Q}$-構造のみならず，l によらない $\mathbb{Z}$-構造を持つことに注目することで，有限個の例外を除く殆ど全ての l に対し，X_Γ の有限体 $\mathbb{F}_l$ 係数のコホモロジー $H^w_{\text{ét}}(X_\Gamma \otimes_K \overline{K}, \mathbb{F}_l)$ を求めることができる (論文 Theorem 6.7)．さらに，l 進コホモロジー ($l \neq p$) に対するウェイト・スペクトル系列と，Mokrane により構成された p 進コホモロジーに対するウェイト・スペクトル系列 ([Mo]) を比較することで，p 進コホモロジー $H^w_{\text{ét}}(X_\Gamma \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ から p 進 Hodge 理論によって定義された局所ゼータ関数 $\zeta_{p\text{-adic}}(s, X_\Gamma)$ が，l 進の場合と同様に，上記の公式で与えられることが示される (論文 Theorem 6.12)．

最後に，今後の展望について述べよう．近年目覚しい発展を遂げている数論幾何学においては，志村多様体と呼ばれる種類の代数多様体の l 進コホモロジーを研究することが極めて重要である．ある種の志村多様体は，Čerednik, Drinfeld, Rapoport-Zink, Varshavsky らによって p 進一意化を持つことが知られており，従って本論文の結果が適用できる．これにより，p 進一意化を持つ志村多様体の l 進コホモロジーの研究が進み，大域 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の両立性の問題等 ([H], Problem 1) に進展を与えると期待される．

参考論文

[1] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture for certain threefolds in mixed characteristic.*

[2] T. Ito, *Stringy Hodge numbers and p-adic Hodge theory.*

参考文献

[D1] P. Deligne, *Théorie de Hodge I*, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, 425–430, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[D2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52, (1980), 137–252.

[H] M. Harris, *On the local Langlands correspondence*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Beijing, 2002.

[K] A. Kurihara, *Construction of p-adic unit balls and the Hirzebruch proportionality*, Amer. J. Math. **102** (1980), no. 3, 565–648.

[Mo] A. Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J. 72 (1993), no. 2, 301–337.

[Mu] G. A. Mustafin, *Non-archimedean uniformization*, Mat. Sb. (N.S.) **105(147)** (1978), no. 2, 207–237, 287.

[RZ] M. Rapoport, T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. **68** (1982), no. 1, 21–101.

[Sa] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 6, 849–995 (1989).

[SS] P. Schneider, U. Stuhler, *The cohomology of p-adic symmetric spaces*, Invent. Math., **105**, (1991), no. 1, 47–122.

[SGA7-I] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, Lecture Notes in Math., 288, Springer, Berlin, 1972.