論文審査の結果の要旨

氏名 伊藤　哲史

伊藤君は本論文において, weight-monodromy 予想とよばれる数論幾何の基本的な未解決問題について研究し、Drinfeld 上半空間による p 進一意化をもつような多様体に対し証明した。代数体上定義された代数多様体は一般に有限個の有限素点で悪い還元をもつが，そこでおこる分岐から生ずる現象は興味深くかつ難しい現象である．よい還元をもつ素点では、そこで Galois 群のエタール・コホモロジーへの作用は不分岐であり，Weil 予想により、よくわかるものである．悪い素点では一般に分岐がおこるが，Weil 予想の拡張とも考えられる weight-monodromy 予想が成り立てば，Galois 群の作用がよく理解できるものとなる．特に Hasse-Weil L 関数の悪い因子の性質がわかるようになる．weight-monodromy 予想はこのように重要な意味をもつものである．約 30 年前に Deligne により定式化されて以来，$\mathbb{C}$ 上の多様体に対する Hodge 理論的類似や関数体上の場合，2 次元以下の場合は示されたが，混標数の場合で 3 次元以上の多様体については未解決である．

この論文で、伊藤君は多様体が Drinfeld 上半空間による p 進一意化をもつ場合に weight-monodromy 予想を証明した．$\mathbb{C}$ 上の多様体は，その普遍被覆空間の離散群による商として表すことができるが，p 進体上の多様体についても、その類似が考えられる場合がある．これが p 進一意化であり，リジッド解析多様体を使って定式化される．特にある種の志村多様体は，悪い還元をもつ素点で p 進一意化をもつ．そして志村多様体のコホモロジーは保型形式にともなう ℓ 進表現の構成という Langlands プログラムへの応用からも重要な対象である．

weight-monodromy 予想とは次の命題である．K を p 進体とし，X を K 上固有非特異な代数多様体とする．ℓ を p とは異なる素数とする．ℓ 進エタール・コホモロジー $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は K の絶対 Galois 群 G_K の有限次元 ℓ 進表現を定める．以下 X は準安定な還元をもつとする．惰性群を I で表し，$t_\ell : I \to \varprojlim_n \mu_{\ell^n} : \sigma \mapsto (\sigma(\pi^{1/\ell^n})/\pi^{1/\ell^n})_n$ を標準全射とし，同型 $\varprojlim_n \mu_{\ell^n} \to \mathbb{Z}_\ell$ を 1 つとってこれを $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell$ と同一視する．このとき，$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の巾零自己準同型 N で $\sigma \in I$ の作用が $\exp(t_\ell(\sigma)N)$ で与えられるようなものがただ 1 つ存在する．$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のモノドロミー・フィルトレイション M_k を $\sum_{i-j=k}(\mathrm{Ker}N^{i+1} \cap \mathrm{Im}N^j)$ と定義する．

weight-monodromy 予想　$F \in G_K$ を幾何的 Frobenius のもちあげとすると，F の M_k/M_{k-1} への作用の固有値は代数的整数であるが，そのすべての共役の複素絶対値は q を K の剰余体の位数とすると $q^{(m+k)/2}$ である．

Ω^d を K 上の d 次元 Drinfeld 上半空間とする．Ω^d は K 上のリジッド解析多様体であり，$\bar{K}$ 値点 $\Omega^d(\bar{K})$ は $\mathbb{P}^d(\bar{K})$ から，K 上定義されたすべての超平面を除いたものである．主結果は次の定理である．

定理　Γ を $PGL_{d+1}(K)$ のねじれのない離散部分群で，商 $PGL_{d+1}(K)/\Gamma$ がコンパクトなものとする．このとき商 $X_\Gamma = \Omega^d/\Gamma$ は K 上の射影非特異代数多様体であるが，この X_Γ について weight-monodromy 予想がなりたつ．

証明の方針は斎藤盛彦氏によるHodge理論的類似の証明にヒントを得たものである．Hodge理論的類似では，Hodge構造の偏極から得られる正値性が証明の重要な役割をはたす．ℓ進コホモロジーでは正値性を考えることは一般にはできない。しかしp進一意化をもつ場合には，還元の各既約成分やそれらの交わりは射影空間から出発して具体的に構成できるものであり，とくにそのℓ進コホモロジーは代数的サイクルの空間からなる$\mathbb{Q}$構造をもちその正値性を考えることができる．これについて，Grothedieckにより定式化された標準予想の一部であるHodge標準予想やLefschetz分解が成り立っていることが確認できる．ここで考えるアンプル可逆層としてはPGLの作用で不変なものだけを考えている．これらの事実と，重さスペクトル系列をもちいたweight-monodromy予想のいいかえ，さらに盛彦氏による正値性の議論を組み合わせることにより，定理の証明がなされる．

この論文の内容は，weight-monodromy予想という数論幾何の基本的な未解決予想を，応用上重要な多様体に対し証明した優れた業績である．よって論文提出者 伊藤 哲史 は博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．