# 論文の内容の要旨

## A class of $C^*$-algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism $C^*$-algebras

## (グラフ環と同相写像 $C^*$ 環を共に拡張した $C^*$ 環のあるクラス)

氏名　勝良 健史

本論文では，**位相グラフ**というものを定義し，それから $C^*$ 環を構成する方法を提案した．位相グラフは (有向) **グラフ**の拡張であると同時に**位相力学系**の拡張にもなっており，この論文で提案した $C^*$ 環の構成方法はグラフ環や同相写像 $C^*$ 環の構成方法の自然な拡張になっている．そして，グラフ環や同相写像 $C^*$ 環に対して成り立つ様々な定理がこの広いクラスに対しても成り立つことを示した．これにより，グラフ環や同相写像 $C^*$ 環という 2 つの活発な分野で発展してきた技術をより多くの $C^*$ 環に適用できるようになっただけでなく，今までは別々のものと思われていたグラフ環と同相写像 $C^*$ 環を統一的に研究することができるようになり，これら 2 つの分野に新たな視点を与えることができた．例えば，位相グラフからできる $C^*$ 環のクラスは，帰納極限，イデアル，商をとるなどの操作に関してグラフ環や同相写像 $C^*$ 環のクラスよりもよくふるまう．また，この論文で考えている $C^*$ 環のクラスは，グラフ環や同相写像 $C^*$ 環のクラスよりもかなり広く，現在 $K$ 理論で分類されている $C^*$ 環をほぼ全て含んでいる．よって，この論文で考えている $C^*$ 環は $K$ 理論を用いた $C^*$ 環の分類理論において重要な役割を担うと信じている．

本論文の結果を述べる前にグラフ環と同相写像 $C^*$ 環の定義を復習しよう．コンパクト空間 $X$ とその上の同相写像 $\sigma$ の組 $\Sigma = (X, \sigma)$ を**位相力学系**という．位相力学系 $\Sigma = (X, \sigma)$ が与えられたとき，空間 $X$ と同相写像 $\sigma$ のどちらの情報も含んでいる $C^*$ 環 $A(\Sigma) = C(X) \rtimes_{\bar{\sigma}} \mathbb{Z}$ を定義することができる．この $C^*$ 環を**同相写像 $C^*$ 環**といい，何十年も前から現在にいたるまで多くの研究者によって研究されてきた．1980 年，Cuntz と Krieger は有限 $\{0,1\}$ 値行列 $A$ から $C^*$ 環 $\mathcal{O}_A$ を構成する方法を提案した．この $C^*$ 環は現在 **Cuntz-Krieger 環**と呼ばれている．有限 $\{0,1\}$ 値行列 $A$ から **Markov シフト**と呼ばれる力学系を定義することができ，Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ はこの Markov シフトを調べる上で大変有効である．有限 $\{0,1\}$ 値行列を与えることは有限グラフを与えることと同値であり，Cuntz-Krieger 環の

構成方法は，Fowler, Kumjian, Laca, Pask, Raeburn, Renault らによって有限とは限らないグラフに対して拡張された．グラフは，頂点の集合 $E^0$，線分の集合 $E^1$ と，各線分の始点と終点を定める写像 $d, r : E^1 \to E^0$ の 4 つ組 $E = (E^0, E^1, d, r)$ として表すことができ，グラフ $E = (E^0, E^1, d, r)$ の**グラフ環** $C^*(E)$ は，互いに直交する射影子の集合 $\{P_v\}_{v \in E^0}$ と部分等距離写像の集合 $\{S_e\}_{e \in E^1}$ であって，2 つの写像 $d, r$ によって定まるある関係式を満たすもので生成される普遍的な $C^*$ 環として定義される．

本論文中で位相力学系とグラフを拡張した**位相グラフ**というものを定義した．位相グラフとは，局所コンパクト空間 $E^0, E^1$，局所同相写像 $d : E^1 \to E^0$ と連続写像 $r : E^1 \to E^0$ の 4 つ組 $E = (E^0, E^1, d, r)$ のことである．$E^0$ と $E^1$ が離散空間のときは，位相グラフは普通のグラフに他ならない．また，位相力学系 $\Sigma = (X, \sigma)$ から位相グラフ $E = (E^0, E^1, d, r)$ が $E^0 = E^1 = X$，$d = \mathrm{id}_X$，$r = \sigma$ として定まる．位相グラフ $E = (E^0, E^1, d, r)$ が与えられたとき，$C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ を $E^0$ と $E^1$ によって定まる 2 つの線形空間 $C_0(E^0)$ と $C_d(E^1)$ であって，2 つの写像 $d, r$ によって定まるある関係式を満たすもので生成される普遍的な $C^*$ 環として定義される．この関係式はグラフ環の定義に現れる関係式を自然に拡張したものである．よって，$E^0$ と $E^1$ が離散空間である位相グラフ $E = (E^0, E^1, d, r)$ によって定まる $C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ はグラフ環 $C^*(E)$ と等しい．また，位相グラフ $E$ が位相力学系 $\Sigma = (X, \sigma)$ から定まっているときは，$C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ は同相写像 $C^*$ 環 $A(\Sigma)$ と同型になる．

$C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ はある関係式を満たす元から生成される普遍的な $C^*$ 環と定義されたが，ここで重要なことはその関係式を満たす元が与えられたとき，いつそれらで生成される $C^*$ 環が $\mathcal{O}(E)$ と同型になるかということを決定することである．これに関し，ゲージ不変一意性定理と Cuntz-Krieger 一意性定理という 2 つの定理を証明した (Theorem 6.5, Theorem 7.11)．ゲージ不変一意性定理とは，関係式を満たす元で生成される $C^*$ 環にゲージ作用という 1 次元トーラスの作用があるとき，その $C^*$ 環は $\mathcal{O}(E)$ と同型であるという定理である．また，Cuntz-Krieger 一意性定理とは，位相グラフ $E$ が**位相的に自由**という条件を満たすときは忠実な生成元で生成される $C^*$ 環は全て $\mathcal{O}(E)$ と同型であるという定理である．これら 2 つの定理は本論文中で繰り返し使われる．

現在の $C^*$ 環の分類理論の主流は，$K$ 理論的情報を用いた分類である．その $K$ 理論を用いた $C^*$ 環の分類において，**核型**である，及び**普遍係数定理**を満たすという 2 つの条件が必要であるということが認識されてきた (全ての核型 $C^*$ 環が普遍係数定理を満たすか否かは知られていない)．位相グラフ $E$ から定まる $C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ は全て上記の 2 つの条件を満たす (Proposition 8.1, Proposition 8.6)．それだけでなく，位相グラフ $E$ から定まる $C^*$ 環 $\mathcal{O}(E)$ のクラスは，現在 $K$ 群を用いた分類が成功している AF 環，実次元 0 単純 AT 環，普遍係数定理を満たす可分単純核型純粋無限環などを含んでいる．しかも，今のところ分類が完成していない単純で射影を持たない $C^*$ 環の例などを多く含んでいる．よって，このようなクラスに対する分類を押し進める上で，位相グラフから作られる $C^*$ 環が重要な役割を果たすと信じている．

$C^*$環が与えられたとき，分類理論の観点からいってまずしなければならないことは，その $C^*$環の $K$ 群を計算することと，その $C^*$環が**単純**であるか否かを決定し，単純でないときは**原始的**か否かや，どのくらいのイデアルを持っているかを調べることである．本論文では，$KK$ 理論を用いることにより，位相グラフから作られる $C^*$環の $K$ 群を計算する上で大変有用な 6 項完全系列を求めることができた (Corollary 8.10)．位相力学系に対して，**極小**，**位相的に推移的**という 2 つの概念があり，これらは同相写像 $C^*$環の単純，原始的という条件に対応している．本論文では，これらの概念を位相グラフに対して拡張し，これらが位相グラフから作られる $C^*$環 $\mathcal{O}(E)$ が単純，原始的になるという条件に対応していることを証明した (Theorem 21.3, Theorem 22.4)．また，ゲージ作用で不変な $\mathcal{O}(E)$ のイデアルは，ある条件を満たす $E^0$ の閉集合 2 つの組と 1 対 1 に対応することを示した (Theorem 16.22)．位相グラフ $E$ が**自由**という条件を満たすときは，$\mathcal{O}(E)$ の全てのイデアルはゲージ作用で不変になるので，このときは上の 1 対 1 対応により $\mathcal{O}(E)$ のイデアル構造を完全に決定することができる (Theorem 20.8)．これらの結果を用いて，まだまだ分かっていないことが多い非単純 $C^*$環の分類にも取り組みたいと思っている．