論文の内容の要旨

論文題目　General Elephants of Three-Fold Divisorial Contractions
3次元因子収縮写像の反標準因子系の一般元

氏名　川北真之

高次元代数多様体の研究において，一つの中心的役割を担うのが極小モデル理論である．この理論は，マイルドな特異点しか持たない代数多様体に対してそれと双有理で調べやすい代数多様体を与える．両者は因子収縮写像およびフリップの合成で結ばれる．森が3次元でこの理論を完成させて以来，3次元代数多様体の明示的研究が期待されるようになってきた．本論文の目的は，修士論文を出発点として，3次元因子収縮写像で例外因子をGorenstein点に収縮させる射の明示的研究を完結させることにある．

1980年代，Reidは3次元Gorenstein端末特異点の特徴付けを得た際に，それがDu Val特異点の1パラメータスムージングの全空間とみなせることに着目し，反標準因子が豊富となる3次元の適当な状況下では反標準因子系の一般元は高々Du Val特異点しか持たないであろうと指摘した．これは今日general elephant予想として知られている．3次元$\mathbb{Q}$-Fano多様体については，Reid, Shokurov，高木による肯定的結果がある．また最も端緒な例証として，森による3次元フリップの存在定理がこの予想を証明することを通してフロップの存在に帰着させて得られることが挙げられる．本論文の主定理は，我々の3次元因子収縮写像に対するgeneral elephant予想の肯定的解決である：

主定理． $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ を3次元因子収縮写像で例外因子EをGorenstein点Pに収縮させる射の芽とする．このとき，Eのまわりで$|-K_Y|$の一般元は高々Du Val特異点しか持たない．

修士論文の結果であるfの数値的分類定理は，本研究の出発点である．Yの特異点から小変形によって得られる端末商特異点の集合を$\{Q : \frac{1}{r_Q}(1,-1,av_Q)\}$とする．$a$は$K_Y = f^*K_X + aE$で定義される食い違い係数，$v_Q$は$0 < v_Q \le r_Q/2$を満たす数である．$d := \dim \mathcal{O}_X/f_*\mathcal{O}_Y(-2E)$，$J := \{(r_Q, v_Q)\}$とおく．数値的分類定理は次の通りである．

数値的分類定理. f は次の中のただひとつの型に属する.

型	d	J	a
O	≥ 2	$\#J \leq 3$	1
I	1	$\{(7,3)\}$ or $\{(3,1),(5,2)\}$	2
IIa	2	$\{(r,2)\}$	$4/rE^3 = 2$ or 4
IIb	2	$\{(r_1,1),(r_2,1)\}$	$(r_1+r_2)/r_1r_2E^3 \geq 2$
III	3	$\{(r,1)\}$	$(1+r)/rE^3 \geq 2$
IV	4	$\emptyset$	2

主定理の証明の概略を述べる．$P \in X$ の一般超平面切断を H_X，その Y 上の双有理変換を H とする．f がO型あるいはI型のときは，H 自身が $|-K_Y|$ の一般元であってしかも高々Du Val特異点しか持たないことが簡単に分かる．f がII，III, IV 型の場合が本質的である．1次元スキーム $C := H \cap E$ を考えれば，その1次コホモロジーが消滅する点で，フリップの場合の類似となる．しかしながら両者の間には致命的な差が存在する．フリップの場合，例外曲線に台を持つ任意の閉スキームの1次コホモロジーが消滅するのに対して，我々の C についてはそれが成立しない．にも拘らず，P が Gorenstein 点という仮定の下では，数値的分類定理で情報を補うことで $C \subset Y$ の局所構造の解析が可能となる．解析結果は $|-K_Y|$ の一般元の挙動の様子を暗に含み，主定理を導く．例えば一般的場合の典型である III 型のとき，Y はただ一つの non-Gorenstein 特異点 Q を持つが，Q のまわりの局所構造の解析によって同型

$$Q \in C \subset Y \cong o \in (x_3\text{-axis}) \subset \mathbb{C}^3/\frac{1}{r}(1,-1,a),$$

が得られる．ここから $|-K_Y|$ は Q の外で自由であることが従う．そこで $|-K_Y|$ の一般元を S とすると，数値的結果から S と C の Q における交点数は $1/r$ と計算され，上同型を考えれば S は A_{r-1} 型の Du Val 特異点であると分かる．主定理は $|-K_Y|$ が non-Gorenstein 特異点の外で自由であること，$|-K_Y|$ の一般元が non-Gorenstein 特異点で Du Val 特異点であることから導かれた．この方針が基本であるが，例外的な場合では，その場合に $-K_Y - E$ が Cartier となることを用いて，$|-K_Y|$ が non-Gorenstein 特異点の外で自由であること，$|-K_Y - E|$ が non-Gorenstein 特異点で自由であること，E が non-Gorenstein 特異点で Du Val 特異点であることを示して主定理を得る．

f が II，III, IV 型の場合は general elephant 予想よりも強い主張が成立することを補足しておく．すなわち，$|-K_Y|$ の一般元 S 上の任意の点 Q について，Du Val 特異点 $Q \in S$ の型は3次元端末特異点の芽としての $Q \in Y$ の一般 Du Val 切断の型に一致する．また，S の X 上の双有理変換を S_X としたとき，Du Val 特異点の部分解消 $S \to S_X$ の例外集合 $E|_S$ は高々2個の規約成分から成る．

主定理と数値的分類定理から f の分類結果が得られる．収縮先 P は Gorenstein 端末特異点，従って孤立複合 Du Val 特異点であるが，その可能性は滑らかな点から複合 E_8 点まで様々である．P は滑らかに近いほど情報を持たなくなるため，一般には収縮先が P となる因子収縮写像 f の可能性は広くなって問題は難しくなる．逆に P が悪い特異点であるほど特異点の記述が複雑となり，個々の場合の f の可能性の研究は易しくなっても包括的な扱いは望めなくなる．結局，滑らかな点あるいは複合 A_n 点のときと，複合 D_n 点あるいは E_n 点のときに二分して，前者については完全といえる f の記述を与え，後者については食い違い係数 a を制限することをもって記述とした．具体的には以下の定理を得た．なお，定理 1 (1)(2) は修士論文の結果である．

定理 1． (1) P を滑らかな点とする．このとき局所座標系 x_1, x_2, x_3 と互いに素な自然数 s, t が存在して，f は重み $(1, s, t)$ の重み付きブローアップとなる．逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である．
(2) P を複合 A_1 点とする．このとき適当な同型

$$P \in X \cong o \in (x_1x_2 + x_3^2 + x_4^N = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

が存在して，f は以下のひとつの重み付きブローアップとなる．

1. 互いに素な自然数 $s, t \leq N/2$ が存在して，重み $(s, 2t-s, t, 1)$.
2. $N = 3$ で，重み $(1, 5, 3, 2)$.

逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である．
(3) P を複合 A_n 点，$n \geq 2$ とする．このとき次のひとつが成立する．

1. 適当な同型

   $$P \in X \cong o \in (x_1x_2 + g(x_3, x_4) = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

   が存在して，f は重み $(r_1, r_2, a, 1)$ の重み付きブローアップとなる．ここで r_1, r_2 は互いに素な自然数，a は $r_1 + r_2$ を割り切る自然数，g は x_3, x_4 の重み $a, 1$ とする重み付き位数が $r_1 + r_2$ で，単項式 $x_3^{(r_1+r_2)/a}$ を含む．逆にこうして得られる写像はすべて因子収縮写像である．

2. P は複合 A_2 点で同型

   $$o \in (x_1x_2 + x_3^3 + g_{\geq 4}(x_3, x_4) = 0) \subset \mathbb{C}^4$$

   を持つ．ここで $g_{\geq 4}$ は全位数 4 以上，Y はちょうど一つ non-Gorenstein 点を持ち $o \in (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4/\frac{1}{4}(1, 3, 3, 2)$ に同型で，食い違い係数 a は 3 である．

定理 2． P を複合 D_n 点または E_n 点とする．このとき食い違い係数 a は 4 以下である．