論文審査の結果の要旨

氏名 川北真之

論文提出者 川北真之 は, 3次元代数多様体の因子収縮写像について研究した.

3次元代数多様体に対してはすでに極小モデルの一般理論が完成している. それによれば, 任意の双有理写像は基本的な双有理写像であるところの因子収縮写像とフリップのいくつかの積に分解することができる. したがって, これらの基本的な双有理写像を分類することは大きな意味がある. フリップに対してはすでに森および Kollár による分類があるので, 川北氏は因子収縮写像の分類について研究したのである.

川北氏に先立つ結果としては, 因子収縮写像の像が商特異点になる場合 (川又) や通常2重点になる場合 (Corti) が知られていたが, 川北氏はこれを大きく前進させ, 因子収縮写像の像が Gorenstein 特異点になる場合にはほとんど分類が完成したといってよいところまできた. 主結果は次のようなものである: 3次元代数多様体の因子収縮写像 $f : Y \to X$ において, 例外因子 $E \subset Y$ が Gorenstein 特異点 $P \in X$ につぶれていると仮定する. このとき, Y の反標準線形系 $|-K_Y|$ の一般元は高々 Du Val 特異点のみを持つ. この結果は, Reid による「general elephant 予想」を因子収縮写像の場合に肯定的に解いたものであり, これを使えば因子収縮写像の分類が容易になることが経験的に知られている. なお, フリップの場合のこれに対応する予想は森および Kollár によってすでに解かれている.

川北氏の結果によれば, Y の特異点の様子が詳細に記述できるので, 単なる general elephant 予想の解決よりもはるかに完全な分類に近い. 川北氏の結果を述べる. 式 $K_Y = f^*K_X + aE$ によって数 a を定義し, $I = \{Q\}$ を Y の仮想的特異点のバスケットとする. 各点 Q のタイプは $\frac{1}{r_Q}(1, -1, \overline{av_Q})$ $(v_Q \leq r_Q/2)$ であるとし, $J = \{(r_q, v_Q)\}_Q$ とおく. このとき, J および a の可能性によって6種類のタイプ (O, I, IIa, IIb, III, IV) がある. $|-K_Y|$ の一般元を S_Y とし, その f による像を S_X とするとき, 川北氏は各タイプに対して S_X および S_Y を記述している. 例えば, タイプ I では, $J = \{(7, 3)\}$ または $\{(3, 1), (5, 2)\}$ であり, $a = 2$ となる. このとき, S_X も Du Val 特異点のみを持ち, X は cE_7-型かまたは cE_8-型にな

る．また，タイプ IIa では $J=\{(r,2)\}$ の形となり，$a=2$ または 4 である．このとき，S_X は D_r-型かまたは D_{r+1}-型になり，S_Y は A_{r-1}-型になる．

以上の結果から，X が cA-型になる場合には完全な分類ができる．すなわち以下のことが成り立つ．まず，X が滑らかならば，X 上に適当な局所座標系が存在して，重み $(1,s,t)$ の重み付ブローアップになる．ここで，s,t は適当な数である．X が cA_1-型になる場合にも，f は重み付ブローアップになる．詳しく言うと，X は方程式 $xy+z^2+w^N=0$ で定義された重み付超曲面になり，f の重みは $(s,2t-s,t,1)$ $(s\leq t\leq N/2)$ となるか，または $N=3$ であり，重みは $(1,5,3,2)$ となる．

X が cA_n-型 $(n\geq 2)$ になる場合には，f は重み付ブローアップになるか，または $n=2$ かつ $a=3$ で，X は方程式 $xy+z^3+g(z,w)=0$ で定義された重み付超曲面になり，Y はただひとつの非 Gorenstein 点を持ち，それは商特異点 $\frac{1}{4}(1,3,3,2)$ のなかで $x^2+y^2+z^2+w^3=0$ で定義された重み付超曲面の特異点になる．

一方，X が cD-型かまたは cE-型になる場合には，f の記述はより複雑になり，完全な記述はできない．しかし，f のタイプは O, I, IIa または IIb になることがわかり，$a\leq 4$ がいえる．

以上の結果は 3 次元多様体の双有理幾何学の発展に大きく貢献するものである．よって，論文提出者 川北真之 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．