論文の内容の要旨

論文題目 Asymptotic behavior of solutions for the coupled systems related with Schrödinger equations (シュレディンガー方程式に関連する連立方程式系の解の漸近挙動)

氏名 下村 明洋

この論文では，シュレディンガー方程式と 2 階双曲型方程式の連立系に於ける時間大域解の漸近挙動を，非線形散乱理論を通して調べる．考える方程式系は，次の 4 つのものである．

- 空間 2 次元に於ける，湯川型相互作用を持つ Klein-Gordon-Schrödinger 方程式系:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, \\ \partial_t^2 v - \Delta v + v = -|u|^2. \end{cases} \tag{KGS}$$

ここで，u, v はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ の複素数値及び実数値の未知関数である．

- 空間 3 次元に於ける，湯川型相互作用を持つ Wave-Schrödinger 方程式系:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = uv, \\ \partial_t^2 v - \Delta v = -|u|^2. \end{cases} \tag{WS}$$

ここで，u, v はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ の複素数値及び実数値の未知関数である．

- 空間 3 次元に於ける，Coulomb ゲージ条件下での Maxwell-Schrödinger 方程式系:

$$\begin{cases} 2i\partial_t u + (\nabla - iA)^2 u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x|} * |u|^2\right) u, \\ \partial_t^2 A - \Delta A = -i\{\overline{u}(\nabla - iA)u - u(\nabla + iA)\overline{u}\} - \frac{1}{2\pi}\partial_t \nabla \left(\frac{1}{|x|} * |u|^2\right), \\ \nabla \cdot A = 0. \end{cases} \tag{MS}$$

ここで，u, A はそれぞれ $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ の複素数値及び $\mathbb{R}^3$-値の未知関数である．

- 空間 3 次元に於ける Zakharov 方程式系:

$$\begin{cases} i\partial_t u+\dfrac{1}{2}\Delta u=uv, \\ \partial_t^2 v-\Delta v=\Delta|u|^2. \end{cases} \tag{Z}$$

ここで，u, v はそれぞれ $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ の $\mathbb{C}^3$-値及び実数値の未知関数である．

空間 2 次元での Klein-Gordon 方程式の自由解と空間 3 次元での波動方程式の自由解の L^∞ ノルムの時間減衰は，ともに $O(t^{-1})$ である．大雑把に言うと，方程式系(KGS), (WS), (Z) の第 1 式は，時間減衰が $O(t^{-1})$ であるようなポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式，方程式系(MS) の第 1 式は，時間減衰が $O(t^{-1})$ であるようなベクトルポテンシャルとクーロンポテンシャルによる非局所的相互作用を持つ Hartree 方程式のように考えられる．従って，これらの方程式系は短距離型散乱と長距離型散乱の境目に相当すると考えられ，これらに対する散乱理論は，大変興味深いものである．

この論文では，次のことを証明する．与えられた小さい散乱データに対して，その Fourier 変換の台に制限を設けずに，それを初期値とする自由解に $t\to\infty$ の時に近づくような，空間 2 次元での方程式系(KGS) の時間大域解の一意存在を示す．与えられた小さい散乱データに対して，その Fourier 変換の台に制限を設けずに，それから構成される修正自由解に $t\to\infty$ の時に近づくような，空間 3 次元での方程式系(WS) 及び(MS) の時間大域解の一意存在を示す．与えられた散乱データに対して，その大きさと Fourier 変換の台の両方に制限を設けずに，それを初期値とする自由解に $t\to\infty$ の時に近づくような，空間 3 次元での方程式系(Z) の時刻無限大近傍に於ける時間局所解の一意存在を示す．これらから，方程式系(KGS) に対する波動作用素，方程式系(WS) と(MS) に対する修正波動作用素及び方程式系(Z) に対する擬波動作用素の存在が従う．

主結果を正確に述べる前に，次の関数空間や記号を導入する．任意の実数 s,m に対して，重み付き Sobolev 空間

$$H^{s,m}\equiv\{\psi\in\mathcal{S}'\colon\|\psi\|_{H^{s,m}}\equiv\|(1+|x|^2)^{m/2}(1-\Delta)^{s/2}\psi\|_{L^2}<\infty\}$$

を，任意の自然数 k, $1\le p\le\infty$ を満たす実数 p に対して，Sobolev 空間

$$W_p^k\equiv\left\{\psi\in L^p\colon\|\psi\|_{W_p^k}\equiv\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha\psi\|_{L^p}<\infty\right\}$$

とする．任意の実数 s に対して，$\|f\|_{\dot H^s}=\|(-\Delta)^{s/2}f\|_{L^2}$ とし，$s>0$ のとき斉次 Sobolev 空間 $\dot H^s$ を，急減少関数全体 $\mathcal{S}$ のノルム $\|\cdot\|_{\dot H^s}$ による完備化として定義する．$t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$U(t)\equiv e^{\frac{it}{2}\Delta},\quad \Omega\equiv(1-\Delta)^{1/2},\quad \omega\equiv(-\Delta)^{1/2}$$

とする．

主結果は以下の通りである．ϕ は Schrödinger 方程式側の散乱データ，(ψ_0,ψ_1) は双曲型方程式側の散乱データで，これらは与えられているものとする．

定理 1. 空間次元は 2 とする．散乱データのノルムの和

$$\|\phi\|_{H^{2,4}}+\sum_{|\alpha|\le4}\|g^5\partial^\alpha\hat\phi\|_{L^2(D)}+\|\psi_0\|_{H^{12,7}}+\|\psi_0\|_{W_1^4}+\|\psi_1\|_{H^{11,7}}+\|\psi_1\|_{W_1^3}$$

は，十分小さいとする．ここで，D は原点を中心とする開単位円板,

$$g(x)=\frac{2}{2(1-|x|^2)^{3/2}-|x|^2}$$

である．このとき，方程式系(KGS) の解 $[u,v]$ で，次をみたすものが一意に存在する:

$$u\in C([0,\infty);H^2),\quad v\in C([0,\infty);H^2)\cap C^1([0,\infty);H^1),$$

$$\sup_{t\geq 0}\left[(1+t)\left\{\|u(t)-u_0(t)\|_{H^2}+\left(\int_t^\infty\|u(s)-u_0(s)\|_{W_4^2}^4\,ds\right)^{1/4}\right\}\right]<\infty,$$

$$\sup_{t\geq 0}[(1+t)(\|v(t)-v_0(t)\|_{H^2}+\|\partial_t v(t)-\partial_t v_0(t)\|_{H^1})]<\infty.$$

ここで，u_0, v_0 はそれぞれ Schrödinger 方程式及び Klein-Gordon 方程式の自由解:

$$u_0(t,s)\equiv(U(t)\phi)(x),\quad v_0(t,x)\equiv((\cos\Omega t)\psi_0)(x)+((\Omega^{-1}\sin\Omega t)\psi_1)(x)$$

である．

定理 2. 空間次元は 3 とする．散乱データのノルムの和

$$\|\phi\|_{H^{5,5}}+\|\phi\|_{H^{0,6}}+\|\psi_0\|_{H^2}+\|\psi_0\|_{\dot H^{-2}}+\|x\omega\psi_0\|_{L^2}+\|x\omega^{-1}\psi_0\|_{L^2}+\|\psi_0\|_{W_1^4}+\|\omega^{-2}\psi_0\|_{W_1^4}$$
$$+\|\psi_1\|_{H^1}+\|\psi_1\|_{\dot H^{-3}}+\|x\psi_1\|_{L^2}+\|x\omega^{-2}\psi_1\|_{L^2}+\|\psi_1\|_{W_1^3}+\|\omega^{-2}\psi_1\|_{W_1^3}$$

は，十分小さいとする．このとき，方程式系(WS) の解 $[u,v]$ で，次をみたすものが一意に存在する:

$$u\in C([0,\infty);H^2),\quad v\in C([0,\infty);\dot H^1\cap\dot H^2),\quad \partial_t v\in C([0,\infty);H^1),$$

$$\sup_{t\geq 2}\left[\frac{t}{(\log t)^2}\left\{\|u(t)-u_D(t)\|_{H^2}+\left(\int_t^\infty\|u(s)-u_D(s)\|_{W_4^2}^{8/3}\,ds\right)^{3/8}\right\}\right]<\infty,$$

$$\sup_{t\geq 2}\left[\frac{t^{3/2}}{(\log t)^2}(\|v(t)-v_0(t)-R(t)\|_{\dot H^1\cap\dot H^2}+\|\partial_t v(t)-\partial_t v_0(t)-\partial_t R(t)\|_{H^1})\right]<\infty.$$

ここで，v_0 は波動方程式の自由解:

$$v_0(t,x)\equiv((\cos\omega t)\psi_0)(x)+((\omega^{-1}\sin\omega t)\psi_1)(x),$$

R は次を満たす関数:

$$\partial_t^2 R-\Delta R=-\frac{1}{t^3}\left|\hat\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2,\quad \|R(t)\|_{\dot H^1\cap\dot H^2}+\|\partial_t R(t)\|_{H^1}\to 0,\quad t\to+\infty,$$

u_D は Schrödinger 方程式の修正自由解:

$$u_D(t,x)\equiv(U(t)e^{-\frac{i|\cdot|^2}{2t}}e^{-iS(t,-i\nabla)}\phi)(x)=\frac{1}{(it)^{3/2}}\hat\phi\left(\frac{x}{t}\right)e^{\frac{i|x|^2}{2t}-iS(t,\frac{x}{t})},\quad S(t,x)\equiv\int_1^t R(s,sx)\,ds$$

である．さらに，次をが成立する．

$$\sup_{t\geq 2}\left[\frac{t^{1/2}}{(\log t)^2}\|v(t)-v_0(t)-R(t)\|_{L^2}\right]<\infty.$$

定理 3. 空間次元は 3 とする．散乱データのノルムの和

$$\|\phi\|_{H^{6,7}}+\|\psi_0\|_{H^5}+\|\psi_0\|_{\dot H^{-3}}+\|x\omega^2\psi_0\|_{L^2}+\|x\omega^{-3}\psi_0\|_{L^2}+\|\psi_0\|_{W_1^5}+\|\omega^{-2}\psi_0\|_{W_1^5}$$
$$+\|\psi_1\|_{H^4}+\|\psi_1\|_{\dot H^{-3}}+\|x\omega\psi_1\|_{L^2}+\|x\omega^{-3}\psi_1\|_{L^2}+\|\psi_1\|_{W_1^4}+\|\omega^{-2}\psi_1\|_{W_1^4}$$

は，十分小さいとする．このとき，方程式系(MS)の解 $[u, A]$ で，次をみたすものが一意に存在する:

$$u \in \bigcap_{k=0}^{1} C^k([0,\infty); H^{3-2k}), \quad A \in C([0,\infty); \dot{H}^1 \cap \dot{H}^3), \quad \partial_t A \in \bigcap_{k=0}^{2} C^k([0,\infty); H^{2-k}),$$

$$\sup_{t\geq 2}\left[\frac{t}{(\log t)^2}\left\{\sum_{j=0}^{1}\|\partial_t^j u(t)-\partial_t^j u_D(t)\|_{H^{3-2j}}+\left(\int_t^\infty \|u(s)-u_D(s)\|_{W_4^2}^{8/3}\,ds\right)^{3/8}\right\}\right]<\infty,$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 2}\Bigg[&\frac{t^{1/2}}{(\log t)^2}\|A(t)-A_0(t)-R(t)\|_{L^2}\\&+\frac{t^{3/2}}{(\log t)^2}\left(\|A(t)-A_0(t)-R(t)\|_{\dot{H}^1\cap\dot{H}^2}+\sum_{j=1}^{2}\|\partial_t^j A(t)-\partial_t^j A_0(t)-\partial_t^j R(t)\|_{H^{2-j}}\right)\\&+\frac{t}{(\log t)^2}\left(\|A(t)-A_0(t)-R(t)\|_{\dot{H}^3}+\sum_{j=1}^{3}\|\partial_t^j A(t)-\partial_t^j A_0(t)-\partial_t^j R(t)\|_{H^{3-j}}\right)\Bigg]<\infty.\end{aligned}$$

ここで，A_0 は Maxwell 方程式の自由解:

$$A_0(t,x)\equiv((\cos\omega t)\psi_0)(x)+((\omega^{-1}\sin\omega t)\psi_1)(x),$$

R は，次を満たす関数:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 R-\Delta R=&\Bigg(\frac{2}{t^3}\frac{x}{t}\left|\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2-\frac{i}{t^4}\left\{\overline{\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)}\nabla\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)-\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)\overline{\nabla\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)}\right\}\\&+\frac{1}{4\pi}\nabla\left[\frac{1}{|x|}*\nabla\cdot\left(\frac{2}{t^3}\frac{x}{t}\left|\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2-\frac{i}{t^4}\left\{\overline{\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)}\nabla\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)-\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)\overline{\nabla\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)}\right\}\right)\right]\Bigg)z(t)^2,\end{aligned}$$

$$\|R(t)\|_{\dot{H}^1\cap\dot{H}^3}+\|\partial_t R(t)\|_{H^2}\to 0,\quad t\to+\infty,$$

$z\in C^\infty(\mathbb{R}_t;\mathbb{R})$ は，$|t|\leq 1/2$ のとき $z(t)=0$，$|t|\geq 1$ のとき $z(t)=1$ であるような関数，u_D は Schrödinger 方程式の修正自由解:

$$u_D(t,x)\equiv\left(U(t)e^{-\frac{i|\cdot|^2}{2t}}e^{-iS(t,-i\nabla)}\phi\right)(x)=\frac{1}{(it)^{3/2}}\hat{\phi}\left(\frac{x}{t}\right)e^{\frac{i|x|^2}{2t}-iS(t,\frac{x}{t})},$$

$$S(t,x)\equiv\frac{1}{8\pi}(\log t)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|y|}|\hat{\phi}(x-y)|^2\,dy-x\cdot\int_1^t R(s,sx)\,ds$$

である．

定理 4. 空間次元は 3 とする．$\phi\in H^{6,9}$, $\psi_0\in H^3\cap\dot{H}^{-2}$, $x\omega^{-1}\psi_0\in L^2$, $\omega^{-2}\psi_0\in W_1^7$, $\psi_1\in H^2\cap\dot{H}^{-3}$, $x\omega^{-2}\psi_1\in L^2$, $\omega^{-2}\psi_0\in W_1^6$ とする．このとき，定数 $T>0$ が存在して，次をみたす方程式系(Z)の解 $[u,v]$ が一意に存在する:

$$u\in C([T,\infty);H^3),\quad v\in C([T,\infty);H^2),\quad \partial_t v\in C([T,\infty);H^1\cap\dot{H}^{-1}),$$

$$\sup_{t\geq T}(t^{5/4}\|u(t)-u_0(t)\|_{L^2}+t\|u(s)-u_0(t)\|_{\dot{H}^1\cap\dot{H}^3})<\infty,$$

$$\sup_{t\geq T}[t\{\|v(t)-v_0(t)\|_{H^2}+\|\partial_t v(t)-\partial_t v_0(t)\|_{H^1\cap\dot{H}^{-1}}\}]<\infty.$$

ここで，u_0, v_0 はそれぞれ Schrödinger 方程式及び波動方程式の自由解:

$$u_0(t,s)\equiv(U(t)\phi)(x),\quad v_0(t,x)\equiv((\cos\omega t)\psi_0)(x)+((\omega^{-1}\sin\omega t)\psi_1)(x)$$

である．