論文の内容の要旨

論文題目
Transmission of Classical Information with Quantum Gaussian States
(和訳　量子ガウス状態を用いた古典情報の伝送)
氏名　相馬正宜

この論文では、量子ガウス状態を用いた通信の限界性能について論じる。

量子ガウス状態を用いた通信は、レーザの発明を背景に、１９６０～１９８０年代にかけて Gordon, Stoler, Yuen, Helstrom らによって研究された。彼らは、光子数測定、ヘテロダイン測定、ホモダイン測定などの標準測定によって達成される通信性能を、Shanonn の通信路符号化定理に基づいて評価した。

これに対し、本論文ではすべての「量子測定」の可能性を考慮する場合に達成可能な通信性能の限界を量子通信路符号化定理に基づき求める。Shannon の通信路符号化定理と量子通信路符号化定理の違いは、前者が符号化／復号化のプロセスと信号の物理現象をまったく切り離して定式化されているのに対し、後者は量子測定過程も復号化のプロセスに含めている点にある。特に、後者では量子力学的な相互作用を利用した復号化も考慮される。

本論文では、通信性能を評価する情報量として通信容量と信頼性関数を考える。量子通信路符号化の場合、これらの量は非可換な作用素を用いて定義されており、その計算は一般には困難である。そのため本研究以前には、計算が容易な以下の２つの場合に結果が知られていただけであった。

- 熱雑音の影響を受けたコヒーレント状態（混合状態）に対する通信容量
- コヒーレント状態に対する信頼性関数の expurgated bound

これ以外の一般の量子ガウス状態に対して情報量を計算するためには、量子ガウス状態の基本公式（べき乗公式、積公式、フィデリティ公式など）を新たに確立する必要がある。本論文ではこれらの公式をマルチモードの場合も含めた一般の量子ガウス状態に対して求める（Ｃｈａｐｔｅｒ３）。この際、量子ガウス状態は量子特性関数によって定義され、平均ベクトル m と共分散行列 α によって特徴付けられる。以下に、べき乗公式とフィデリティ公式を示す。

量子ガウス状態のべき乗公式

任意の $s>0$ に対して、平均 m、共分散行列 α を持つ量子ガウス状態のべき乗の量子特性関数は以下のとおりである。

$$\mathrm{Tr}\rho_m^s V(z) = \mathcal{N}_s(\alpha)\exp\left[im^T z - \frac{1}{2}z^T \alpha \mathcal{G}_s(\alpha) z\right] \tag{1}$$

ここで、$\mathcal{N}_s, \mathcal{G}_s$ は以下によって与えられる。

$$\mathcal{N}_s(\alpha) = \left[\det f_s(\mathrm{abs}(\Delta^{-1}\alpha))\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{G}_s(\alpha) = g_s(\mathrm{abs}(\Delta^{-1}\alpha)) \tag{2}$$

ただし、

$$\begin{aligned} f_s(d) =&(d+1/2)^s - (d-1/2)^s, \\ g_s(d) =&\frac{1}{2d}\cdot\frac{(d+1/2)^s + (d-1/2)^s}{(d+1/2)^s - (d-1/2)^s} \end{aligned} \tag{3}$$

であり、$\mathrm{abs}(\cdot)$ は対角化可能行列 $M = P\mathrm{diag}(a_j)P^{-1}$ に対して $\mathrm{abs}(M) = P\mathrm{diag}(|a_j|)P^{-1}$ として定義される。

量子ガウス状態のフィデリティ公式

平均 m_1, m_2 と共通の共分散行列 α を持つ密度作用素 ρ_{m_1}, ρ_{m_2} に対するフィデリティは以下のとおりである。

$$\mathrm{Tr}\left|\sqrt{\rho_{m_1}}\sqrt{\rho_{m_2}}\right| = \exp\left[-\frac{1}{8}(m_1 - m_2)^T \alpha^{-1}(m_1 - m_2)\right] \tag{4}$$

これらの基本公式をもとに以下の結果を得ることができる（Ｃｈａｐｔｅｒ４）。

A. 一般のシングルモード量子ガウス状態に対する通信容量の公式
B. 一般のシングルモード量子ガウス状態に対する量子 Gallager 関数の公式
C. 熱雑音の影響を受けたコヒーレント状態（混合状態）に対する信頼性関数の expurgated bound
D. スクイズド状態に対する信頼性関数の下界
E. 一般のシングルモード量子ガウス状態に対する zero rate exponents の上界と下界

ここで、上記の結果の意味を明確にするために通信容量と信頼性関数の説明をしよう。通信容量は「誤り無く情報を伝送することができる通信速度の限界値」を示す情報量

であり以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} C &= \sup_{\pi \in \mathcal{P}_1} \Delta H(\pi), \\ \Delta H(\pi) &= H\left(\int \rho_m \pi(dm)\right) - \int H(\rho_m)\pi(dm) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $H(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho \log \rho$ は von Neumann entropy、$\mathcal{P}_1$ は $\int f(x)\pi(dx) \leq E$ を満たす確率測度 π の集合、ρ_m は伝送に使われる量子状態の密度作用素をそれぞれあらわしている。結果Aでは、ρ_m が平均 m の量子ガウス状態の場合に通信容量の公式が与えられた。

信頼性関数は「通信容量より小さい通信速度 R において符号長 n を無限大にするときに誤り確率が0に収束する速度」をあらわしている。信頼性関数は直接求めることが困難であり、その下界や上界によって評価される。下界としては以下に示す random coding bound $E_r(R)$ と expurgated bound $E_{ex}(R)$ が知られている。

- **random coding bound**

$$\begin{aligned} E_r(R) &= \sup_{0\leq s\leq 1} (\sup_{0\leq p} \sup_{\pi\in\mathcal{P}_1} \mu(\pi, s, p) - sR), \\ \mu(\pi, s, p) &= -\log \mathrm{Tr}\left[\int \mathrm{e}^{p[f(m)-E]} \rho_m^{\frac{1}{1+s}} \pi(dm)\right]^{1+s} \end{aligned} \tag{6}$$

  ただし、ρ_m が混合状態の場合の random coding bound はまだ証明されていない。

- **expurgated bound**

$$\begin{aligned} E_{ex}(R) &= \sup_{1\leq s}(\sup_{0\leq p} \sup_{\pi\in\mathcal{P}_1} \tilde{\mu}(\pi, s, p) - sR) \\ \tilde{\mu}(\pi, s, p) &= -s \log \int\int \mathrm{e}^{p[f(m)+f(m')-2E]} \left(\mathrm{Tr}\sqrt{\rho_m}\sqrt{\rho_{m'}}\right)^{\frac{1}{s}} \pi(dm)\pi(dm') \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $\mu(\pi, s, p)$ と $\tilde{\mu}(\pi, s, p)$ は量子 Gallager 関数と呼ばれる。上記の結果Bでは ρ_m が平均 m の量子ガウス状態の場合にこれらの関数の公式が与えられた。信頼性関数の下界を求めるためには更に (6)、(7) に与えられている最適化問題を解く必要があるが、本論文では上記C，Dの結果が得られている。なお random coding bound はコヒーレント状態に対してすら解析解を求めることができないことが知られている。一般の量子ガウス状態に対して信頼性関数の下界を求めるためには結果Bを用いて数値解析を行う必要があるが、これについては未検討である。

通信速度を $R \to +0$ とする時の信頼性関数の値 $E(+0)$ は zero rate exponents と呼ばる。量子通信路符号化の場合、信頼性関数の有効な上界はまだ知られていないが、唯一量子ガウス状態に対する zero rate exponents の上界は求めることができる。その証明がEで与えられる。なお、Eで与えられた上界と下界は純粋状態の場合一致する。

この論文のもう一つの目標は、Yuen, Helstrom らによる量子状態選択の問題と、Gordon による２元離散化の問題を量子通信路符号化定理に基づいてとらえなおすことである。Ｃｈａｐｔｅｒ５では量子状態選択の問題を扱う。すなわち、伝送中に信号の減衰と熱雑音の影響を受ける場合に、伝送媒体として最適な量子ガウス状態を求める。なおこの場合の評価は（信号のエネルギー）＋（スクイジングのエネルギー）が一定であるという条件の下で行われる。その結果以下の事実が明らかになる。

- スクイズド状態を用いるとコヒーレント状態を用いた場合と比べて通信容量が減少する。ただし、信号の減衰も熱雑音の影響もない理想的な場合、スクイジングの度合いがある範囲を超えなければ、スクイズド状態を用いても通信容量は変化しない。

- 状態の複素振幅の実成分だけに情報をのせる場合、スクイズド状態をもちいることにより、通信容量は増加する。

- スクイズド状態を使うことにより、低レートの信頼性関数の値は常に増加する。

Ｃｈａｐｔｅｒ６では、「binary quantum counter が微弱な光の持つすべての情報を引き出すことができる」という Gordon の主張に基づき、量子通信路符号化における２元離散化の問題を定式化し、通信容量と信頼性関数に関して Gordon の主張を検証する。ここで、２元離散化とは、量子通信路符号化で使われる量子状態 (letter state) の数を２つに制限することを意味する。我々は理想的な通信路を使って純粋ガウス状態を送る場合を考え、２元離散化に基づく通信容量と２元離散化の制限を受けない通信容量を比較する。また同様の比較を zero rate exponents に関しても行う。この結果以下のことがわかる。

- 信号のエネルギーが十分小さければ、最適な２元離散化による通信容量は制限なしの通信容量とほぼ一致する。

- 最適な２元離散化による zero rate exponents は制限なしの場合の値と常に一致する。

今後、新しい光通信システムのための具体的な符号化方式、量子測定の研究が必要となる。特に量子測定はＰＯＶＭ (positive operator valued measurement) によって数学的に定義されているものの、その物理的な実現方法は未解決である。本論文はこうした研究によって実現される通信の限界性能を予め求め、伝送媒体として用いる量子ガウス状態と限界性能との関係を明らかにするものであり、システム実現に向けた最も基礎的な検討を与えている。