審査の結果の要旨

論文提出者氏名　　松尾 宇泰

工学や自然科学に現れる現象の多くは偏微分方程式で記述されるが，解析解が得られることは稀であり，数値解法が古くから数多く提案されてきた．とくに，保存型あるいは散逸型偏微分方程式，すなわち，何らかの意味での「エネルギー」を保存，あるいは散逸する偏微分方程式においては，数値スキームに対しても「エネルギー」の保存性・散逸性を要請することは極めて自然なアイデアであり，実際，種々の保存型・散逸型偏微分方程式に対して保存・散逸数値解法が個別に提案されてきた．しかし，それらの解法はすべて天下り的に提示され，職人芸的に構成されたものであった．これに対して，1996 年，降旗・森は，「エネルギー」の変分導関数を用いて定義される保存型・散逸型偏微分方程式のあるクラスに対して，個々の方程式の形によらず，機械的に，保存・散逸性をもつ差分スキームを構成する手法を開発した．「離散変分法」と呼ばれるこの手法の出現によって，ある種の偏微分方程式の保存・散逸解法の構成は職人芸から解放されることとなった．しかし，この「離散変分法」の適用対象は，実数値単独方程式に限られており，複素数値偏微分方程式や連立偏微分方程式への拡張が望まれていた．また，「離散変分法」には，解の精度が低いことや，非線形計算を含むために計算時間が多くかかることなどの弱点があり，これらの改良が期待されていた．本論文は，これらの期待に応えるものであり，``Discrete Variational Method: Its Various Extensions and Applications''（「離散変分法の拡張と応用」）と題し，全 7 章から成る．

まず第 1 章 ``Introduction'' では，代表的な散逸偏微分方程式である Cahn-Hilliard 方程式を例にとって，散逸性を再現する数値解法の重要性を説明し，続いて，降旗・森による離散変分法を簡単に説明し，最後に，章立てを述べる形で，本論文の主題である離散変分法の拡張及び改善について簡潔に説明している．

第 2 章 ``Furihata and Mori's `Discrete Variational Method' '' では，本研究の基礎となる降旗・森の離散変分法の概観を与えている．降旗・森の離散変分法では，「エネルギー」の変分導関数を用いて定義されるあるクラスの保存型・散逸型偏微分方程式に対して，変分導関数の離散版を考え，それを用いて偏微分方程式の導出過程を離散化することによって差分スキームを導出する．このことによって，差分スキームに自動的に偏微分方程式のもつ「エネルギー」保存性・散逸性が引き継がれることとなる．

第 3 章 ``Extension to Complex-Valued PDEs and Its Applications'' では，降旗・森の離散変分法を，複素数値をとる偏微分方程式の場合，より正確には，「エネルギー」の複素変分導関数を用いて定義されるあるクラスの保存型・散逸型偏微分方程式の場合に拡張している．この場合，複素変分導関数の離散版を考え，偏微分方程式の導出過程を離散

化することによって差分スキームが定義され，自動的に「エネルギー」保存性・散逸性が差分スキームに引き継がれる．本章では，さらに，この手法を具体的に，非線形 Schrödinger 方程式（保存型），複素 Ginzburg-Landau 方程式（散逸型），Newell-Whitehead 方程式（散逸型）に適用し，前二者に対しては，その差分スキームの理論的収束証明も与えている．

第 4 章 ``Extension to Systems of PDEs and Its Application" では，離散変分法を連立偏微分方程式の場合，より正確には，「エネルギー」の変分偏導関数を用いて定義されるあるクラスの保存型・散逸型偏微分方程式の場合に拡張している．この場合にも，変分偏導関数の離散版を考え，連立偏微分方程式の導出過程を離散化することによって連立差分スキームが定義され，自動的に「エネルギー」の保存性・散逸性が引き継がれる．本章の最後では，保存型連立偏微分方程式として有名な Zakharov 方程式に本手法を適用し，導かれた差分スキームがエネルギー保存以外の，もとの方程式のもつ性質をいくつか引き継いでいることを理論的に示している．

第 5 章 ``Extension for Linearly-Implicit Schemes and Its Applications" では，離散変分法を拡張して，陰的線形な差分スキーム，すなわち，時間発展の毎ステップで，線形連立方程式を解くだけでよい差分スキームを構成する手法を提案している．前章までの離散変分法では，非線形偏微分方程式に対して差分スキームを構成すると，常に非線形な差分スキームが導かれ，時間発展の毎ステップで，非線形連立方程式を解く必要が生じ，多大な計算時間が必要となる．本章では，新しい概念「多段階化された離散変分導関数」を導入し，陰的線形な保存・散逸スキームを導出できるように離散変分法を拡張している．さらにこの手法を種々の保存型・散逸型偏微分方程式に適用し，Newell-Whitehead 方程式（散逸型）に対して，陰的線形差分スキームが高速かつ安定であることを数値的に示している．

第 6 章 ``Extension for Higher-Order Schemes" では，離散変分法を拡張して，空間・時間方向により高精度な保存・散逸差分スキームを構成する手法を提案している．前章までの手法で得られる差分スキームはすべて空間・時間方向の精度が高々 2 次である．本章では，空間方向については，周期的境界条件という制約の下ではあるが，任意次数の精度の保存・散逸差分スキームを導出できるように離散変分法を拡張している．一方，時間方向については，安定性のために高々 6 次という範囲内ではあるが，高次の保存・散逸差分スキームを構築できるように離散変分法を拡張している．

第 7 章 ``Conclusions and Remarks" では，以上の結果をまとめるとともに，今後の課題について述べている．以上を総合するに，本論文は，離散変分法，すなわち，工学や自然科学に現れる保存型・散逸型偏微分方程式に対して自動的に保存・散逸差分スキームを導出するための手法を様々に拡張し，またその応用例を示したものであり，数理工学の分野の発展に大きく寄与するものである．

よって本論文は，博士（工学）の学位請求論文として合格と認められる．