論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目　　フラクタル格子上のパーコレーション

氏　　名　　篠 田 正 人

本論文ではフラクタル格子におけるパーコレーションの問題を考えた．パーコレーションにおいて平行移動不変性のないグラフでは $\mathbb{Z}^d$ 格子上とどのような違いがあるか，またフラクタルの持つ特別な性質がパーコレーションを考えることで見出せないか，といった点などを動機として研究を行った．

フラクタルは finite ramified であるもの (有限個の点を除去すると不連結になるもの) および infinite ramified であるもの （有限個の点の除去では分離できないもの）の 2 種類に分類できる．この論文では前者の典型例である Sierpinski gasket 格子，および後者の典型例である Sierpinski carpet 格子における パーコレーションについて研究した．

まず，Sierpinski gasket 格子でのパーコレーションについて考えた． $\mathbf{O} = (0,0)$, $a_0 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $b_0 = (1,0)$ とする．F_0 を $\triangle \mathbf{O} a_0 b_0$ の 3 頂点およびそれらを結ぶ辺からなるグラフとする．$\{F_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を

$$F_{n+1} = F_n \cup (F_n + a_n) \cup (F_n + b_n)$$

で与えられるグラフの列とする．ここで $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$, $kA = \{kx \mid x \in A\}$, $a_n = 2^n a_0$, $b_n = 2^n b_0$ である．$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ とする．この中の長さ 1 の辺がそれぞれ独立に確率 p で open, 確率 $1-p$ で closed とする bond percolation を考える．P_p

を対応する確率測度, $\mathbf{O}$ から open な辺のみを通って到達できる点の集合を C とする. $\theta(p)=P_p(|C|=\infty)$ とし, 臨界確率を $p_c=\inf\{p \mid \theta(p)>0\}$ とする. このとき $p_c=1$ である. correlation length

$$\xi(p)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\log P_p(\mathbf{O}\leftrightarrow(n,0,\dots,0))\right\}$$

を定める. この関数が $p\uparrow p_c$ でどのような振る舞いをするかを調べた. d 次元正方格子では $p\uparrow p_c$ で $\xi(p)\approx|p_c-p|^{-\nu}$ であると予想されているが, この Sierpinski gasket 格子ではこれと異なった発散のオーダーであることがわかった.

Theorem 1

$$\lim_{p\to 1}-\frac{\log\xi(p)}{\log(1-p)}=\infty, \tag{1}$$

さらに

$$\lim_{p\to 1}\frac{\log(\log\xi(p))}{\log(1-p)}=-2. \tag{2}$$

そしてこのときの hyperscaling relation について考察を行った. また, この $\xi(p)$ のオーダーについてはさらに詳細まで計算することが可能であり, 他の finite ramified なフラクタル格子 (snowflake, pentakun) においても同様に求めることができることを示した.

次に, Sierpinski carpet 格子でのパーコレーションについて考えた. 一般化された Sierpinski carpet 格子を $\mathbb{Z}^2$ の部分グラフとして定義する. $L\geq 2, T\subset\{0,1,\dots,L-1\}^2$ とする. ただし $(0,0)\in T$ を仮定する. グラフ $G_T=(V_T,E_T)$ を以下のように構成する.

$$V_T^0 = \mathbf{Z}^2\cap\{(x,y)\mid 0\leq x,y\leq 1\},\quad V_T^{n+1}=\bigcup_{(i,j)\in T}\left(V_T^n+(iL^n,jL^n)\right)\quad(n\geq 0),$$

$$V_T = \bigcup_{n=0}^{\infty}V_T^n,\quad E_T=\{\langle u,v\rangle \mid u,v\in V_T, ||u-v||_1=1\}.$$

$L=3, T=\{(i,j)|0\leq i,j\leq 2,(i,j)\neq(1,1)\}$ のときの G_T が最も知られた Sierpinski carpet 格子 (図 1) である. この G_T における bond percolation を考え, その臨界確率を $p_c(G_T)$ とする. T にどのような条件があれば $p_c(G_T)<1$ となるか, すなわち自明でない相転移が存在するか, を考える. $\{(i,j)\mid i\in\{0,L-1\} \text{ or } j\in\{0,L-1\}\}\subset T$ ならば $p_c(G_T)<1$ という結果が Kumagai (1997) によって得られている. これを以下のように拡張した. ここで $T_l=\{j|(0,j)\in T\}$, $T_r=\{j|(L-1,j)\in T\}$, $T_d=\{i|(i,0)\in T\}$, $T_u=\{i|(i,L-1)\in T\}$ と書くことにする.

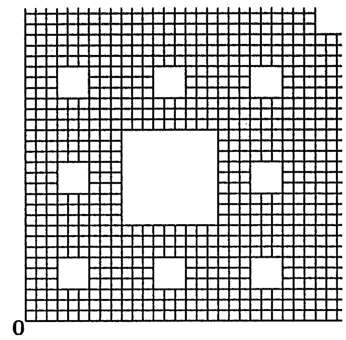

図 1: the Sierpinski carpet lattice

Theorem 2

$$\text{任意の } t \in T \quad \text{に対し} \quad T \setminus \{t\} \quad \text{は連結}, \tag{3}$$

および

$$|T_l \cap T_r| \geq 2 \text{ かつ } |T_d \cap T_u| \geq 2. \tag{4}$$

を仮定する. このとき $p_c(G_T) < 1$ である.

また, $p_c(G_T) < 1$ となるための T の必要条件, および G_T の等周次元と臨界確率との関係についても考察を行った.

Sierpinski carpet 格子において oriented percolation についても考えた. これは open な辺を通過するとき, 右または上向き (各座標成分の正方向) にしか通れない, という制限をつけたものである. 特に T が対称性を持つ場合について考えた. $L = 2a+b$ $(a, b > 0)$, $T_{a,b} = \{0, 1, \ldots, L-1\}^2 \setminus \{a, a+1, \ldots, a+b-1\}^2$ とする.

Theorem 3 $a \leq b$ ならば $\vec{p_c}(G^2_{a,b}) = 1$.

この結果は, $\mathbb{Z}^2$ から取り除かれる部分がある程度大きければ oriented percolation においては自明でない相転移が起こらないことを示している. よく知られたように $p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$ であり, この点において Sierpinski carpet 格子と $\mathbb{Z}^2$ には大きな違いがあることがわかる. なお残念ながら, 現段階では $a > b$ の場合に自明でない相転移があるかどうかはわかっていない.

同様に, Sierpinski carpet の高次元化のひとつである Menger sponge の格子についても, 穴が十分大きければ自明でない相転移が起こらないことを示した.