論文審査の結果の要旨

氏名　篠田 正人

本論文では、フラクタル格子におけるパーコレーションの問題を取り扱っている。$G=(V,E)$ を連結な無限グラフとする。ここで V は頂点集合、E は V の2つの元を結ぶ辺の集合である。V, E は高々可算、また各点から出る辺の本数は有限とする。$[0,1]$ 区間に値を取るパラメータ p を決め、E の元が独立にそれぞれ確率 p でつながっており、確率 $1-p$ で切れているとする。頂点 $v \in V$ からつながっている点の集合 $C(v)$ が定まる。$P_p(|C(v)|=\infty)$ を $\theta(p)$ で表す。θ は p に関して単調非減少である。臨界確率 p_c を $p_c = \inf\{p \mid \theta(p) > 0\}$ で定める。また、$w_n \in G$, $n=1,2,\ldots,$ で v からの距離が n であるような適当な列を取り

$$\xi(p) = \lim_{n\to\infty}\Big\{-\frac{1}{n}\log P_p(\ v \text{ と } w_n \text{ がつながっている})\Big\}^{-1}$$

と定める。本論文ではこれらの量についてフラクタル格子について研究している。そして、以下の結果を得ている。

定理 1 (1) *d*-次元 *pre-Sierpinski gasket* の場合

$$\xi(p) \approx \exp\Big\{\frac{\log 2}{2^d(d-1)}(1-p)^{-(d^2-d)}\Big\} \qquad p \uparrow 1.$$

(2) *pentakun* 格子の場合

$$\xi(p) \approx \exp\Big\{\frac{\log(1+\sqrt{3})}{64}(1-p)^{-2}\Big\} \qquad p \uparrow 1.$$

(3) *snowflake* 格子の場合

$$\xi(p) \approx \exp\Big\{\frac{\log 3}{256}(1-p)^{-4}\Big\} \qquad p \uparrow 1.$$

また、pre-Sierpinski gasket における correlation length の存在、臨界指数の発散、 hyperscaling relation の成立を recursion formula を用いて証明し、correlation length の発散のさらに詳細なオーダーを計算する方法を述べ、d 次元 pre-Sierpinski gasket などの場合に実際の計算を行っている。

さらに本論文では一般化された Sierpinski carpet 格子を $\mathbf{Z}^2$ の部分グラフとして定義し、$p_c < 1$, $p_c = 1$ となるための十分条件を与えている。$L \geq 2, T \subset \{0, 1, \ldots, L-1\}^2$ とする。ただし $(0,0) \in T$ を仮定する。グラフ $G_T = (V_T, E_T)$ を以下のように構成する。

$$\begin{aligned} V_T^0 &= \mathbf{Z}^2 \cap \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}, \quad V_T^{n+1} = \bigcup_{(i,j)\in T} (V_T^n + (iL^n, jL^n)), \\ V_T &= \bigcup_{n=0}^{\infty} V_T^n, \quad E_T = \{\langle u, v\rangle \mid u, v \in V_T, ||u-v||_1 = 1\}. \end{aligned}$$

$T_l = \{j|(0,j) \in T\}$, $T_r = \{j|(L-1,j) \in T\}$, $T_d = \{i|(i,0) \in T\}$, $T_u = \{i|(i,L-1) \in T\}$ とおく。

定理 2 (1) 任意の $t \in T$ に対し $T \setminus \{t\}$ は連結、$|T_l \cap T_r| \geq 2$ かつ $|T_d \cap T_u| \geq 2$ ならば $p_c < 1$ である。
(2) 以下の (i), (ii) のいずれかが満たされているならば $p_c = 1$ である。
(i) ある j_0 に対し $|\{i \mid (i, j_0) \in T\}| \leq 1$.
(ii) $|T_l \cap T_r| \leq 1$.

上記の定理に関しては熊谷による研究があるが、本論文の結果はこれを含むより広い例に対して適用可能である。また、有向グラフに対するパーコレーションについても結果を与えている。

以上のように本論文は独創性のあるきわめて質の高いもので、論文提出者 篠田 正人 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。