論文の内容の要旨

論文題目　MAX 2-SAT と MAX DICUT に対する新しい近似解法

氏名　松浦 史郎

数理最適化の分野には, 数多くの NP-困難な問題が存在する. これらの問題に対して多項式時間解法が存在しない事を, 殆んどの研究者が信じている. この事実へ対処方法として, 二つ方法がある. 一つは古典的な方法で, 発見的解法を用いるアプローチである. つまり, 問題に対して, 理論的な保証は無いものの, 経験的もしくは実験的に高速に解け, かつ最適解に近いと思われる解を出力する解法を用いるものである. 工学的応用においては, この手法は非常に実用的であり, 実務においては多くの場合充分な性能を備えている. しかしながら発見的な解法は, "実用に使える解" を制限時間内に "必ず" 答える事は保証できない. この事に対処する為に, 近年になって近似解法の構築というアプローチが研究されるようになってきた. 近似解法とは, 保証された精度を持つ許容解を必ず答えてくれる解法である. 計算時間がデータ入力サイズの多項式でおさえられる近似解法を特に多項式時間近似解法と呼ぶ.

本論文では, 近似解法の研究において大きなブレークスルーと目されている, 1995 年に発表された Goemans と Williamson の解法を元にして, 新たな解法を提案する. 取り扱う問題は, 最大有向カット問題 (maximum directed cut problem; MAX DICUT), 及び, 最大 2-充足可能性問題 (maximum 2-satisfiability problem; MAX 2-SAT) である. これらの問題に対して知られていた最も良い近似解法の近似比は, それぞれ 1/4, 3/4 であったのに対し,

Goemans と Williamson は, 近似比 0.79607, 0.87856 を持つ解法を提案した. この結果を受けて, Feige と Goemans は新たな手法を導入する事によって解法を改良し, 近似比を 0.931 と 0.857 に改善した. その後, Zwick によりさらに僅かに改善され, 0.931091 と 0.859643 という近似比を持つ解法が提案された. これらの近似比は数値計算によって算出されており, 解析的には求められていない事に注意されたい.

本研究では近似比を改良する新たな手法を提案している. これにより近似比はさらに改善され, MAX DICUT と MAX 2-SAT に対し, 0.935 と 0.863 という近似比を持つ解法が構築できた.

最新の結果では, Lewin, Livnat, Zwick により近似比 0.940 と 0.874 が達成されている. この結果は, Feige と Goemans の手法と我々の手法を組み合わせる事によって達成されている.

Goemans と Williamson の解法では, 問題を整数計画問題として定式化している. ただし, 各変数は $\{-1, 1\}$ の値のみを取るものである. 彼らの解法は, この整数計画問題を半正定値計画 (semidefinite programming; SDP) 問題に緩和している. SDP は多項式時間で解ける事が知られているので, 多項式時間で緩和問題の最適解が得られる. この最適解を元に, 高次元の超球面上に分布したベクトルの組を求める. 次に, 超球面上に一様な確率でベクトルを一つ定め, 緩和問題の最適解から得られたベクトルとの内積の符号により, 元の整数計画問題の変数値を定める. この一連の操作により得られる解による目的関数値の期待値が, 最適値の 0.79607, 0.87856 倍以上である事が示されたのである.

本論文で示す解法では, 高次元の超球面上に分布したベクトルの組において, 特別な次元が一つだけ存在する事に着目する. 超球面上に一様な確率でベクトルを一つ定めるかわりに, 特別な次元の方向には適当な分布密度を持ち, その他の次元の方向では一様であるような確率分布密度に従ってベクトルを定める. これを "歪んだ分布密度関数に基づく超平面分離法 (*hyperplane separation technique with skewed distribution function*)" と呼んでいる. この解法は, 一見単純に思えるが, 良い分布密度関数を求めるにあたって, 解決すべき自明でない問題点が存在する. より詳しく述べるならば, ある分布密度関数を用いた際の近似比が, 発生させるベクトルの次元に密接に依存している. そこで本論文では, 2 次元球面上での分布密度関数と n 次元球面上での分布密度関数との間の関係を示し, さらに, 2 次元球面上で定義される分布密度関数の特殊なクラスを提案する. このクラスに属する関数は, 一つ定めると, それに対応して任意の次元において同じ近似比を達成する分布密度関数を求められるという性質を持っている. さらに, 2 次元球面上での提案された関数クラスの中から良い近似比を達成する関数を選ぶ方法を述べている. その結果, 上で述べた通り, 近似比が MAX DICUT, MAX 2-SAT に対し, それぞれ 0.935 と 0.863 となる分布関数を求める事ができた.

また, 提案した解法は確率的解法 (randomized algorithm) であるが, Mahajan と Ramesh による Goemans と Williamson の解法に対する脱ランダム化 (derandomization) 手法を援用する事により, 同様に脱ランダム化を行なって, 決定的解法 (deterministic algorithm) も示した. さらに, この手法で得られる決定的解法の近似比は, 分布の歪みに本質的に依存していない事実が明らかになった. そのため, 本研究は解法の提案ではなく, 新しい解析手法の提案としても捉える事が可能になった.