審査の結果の要旨

論文提出者氏名　　松浦　史郎

組合せ最適化の分野においては，ネットワークフローのような良い構造が離散凸性として認識される一方， 巡回セールスマン問題に代表されるNP困難問題への挑戦が続けられており，応用からの強い要請を受ける形で，メタヒューリスティックと総称される一群のアプローチや理論的保証を伴った近似解法が開発されている．本論文では，NP困難な問題の中でも中心的な位置を占める最大有向カット問題(maximum directed cut problem; MAX DICUT)，及び，最大2-充足可能性問題(maximum 2-satisfiability problem; MAX 2-SAT) に対し，新たな近似解法の提案を行う．本研究で提案する解法は，近似解法の研究における大きなブレークスルーであるGoemansとWilliamsonの解法(1995年)を改良し，それぞれの問題に対して近似比 0.863 と 0.935 を達成している（この近似比は解法提案時点における世界記録である)．本論文はこれらの手法とその理論解析について論ずるものであり，6章からなる．

第1章は「序論」であり，研究の背景や関連する既存の概念の紹介を行うとともに，本論文の目的を述べている．

第2章は「記法と問題の定義」である． 特に本研究で取り扱う MAX DICUT と MAX 2-SAT 及びそれらに関連する問題についてその相互関係を整理している．

第3章は「先行研究」であり，MAX DICUTとMAX 2-SATの近似解法の先行研究についてまとめている． 特に，GoemansとWilliamsonの解法における半正定値計画緩和と超平面分離法による許容解導出法について詳細に記述している． GoemansとWilliamsonの解法の近似比は0.79607と0.87856であるが，その後， FeigeとGoemansは「回転」と称する技法を導入して 近似比を 0.859 と 0.931に改善した． さらに，Zwickはその技法を改良して 0.859643 と 0.931091 という近似比を持つ解法を提案した． 上記の先行研究はすべて確率的解法であるが，これらの解法から確率的な手続きを取り除き決定的な解法を構築する「脱ランダム化」と呼ばれる手法がMahajanとRameshによって提案されている． 第3章では，これについても記述している．本章の最後に，多項式時間近似解法の近似比の理論的上界について簡単にまとめてある．

第4章では，新たな近似解法の提案を行っている． 本論文で提案する解法では，GoemansとWilliamsonの解法と同様に，問題を整数計画問題として定式化し，これを半正定値計画問題に緩和し，その解をもとに高次元の超球面上に分布したベクトルの組を求める． 最後に，超球面上に「適当な」確率でベクトルを発生させ，別に定めたベクトルとの内積の符号に基づいて元問題の近似解を構成する． この近似解の期待値が，MAX DICUTとMAX 2-SATに対してそれぞれ，最適値の 0.863 と 0.935 倍以上であるという

のが本論文の結果である．

本論文以前の解法が，超球面上に一様な確率でベクトルを一つ定めているのに対して，本論文では，高次元の超球面上の分布において特別な方向が一つだけ存在する事に着目し，その特別な方向には歪んだ分布密度を持ち，その他の方向では一様分布に従うベクトルを用いる． これを「歪んだ分布密度関数に基づく超平面分離法」と呼んでいる． このアイデアに従って解法を具体的に設計するには，良い近似値を与えるような歪んだ分布密度を定める必要がある．本論文では，高次元球面上の分布密度とその 2 次元球面上の周辺分布との関係を解析し，近似解法の設計に有用な 2 次元球面上の分布密度のサブクラスを提示している． このサブクラスに属する関数は，それに対応して任意の次元において同じ近似比を達成する分布密度を求められるという性質をもつので，2 次元球面上の分布密度のサブクラスの中から良い近似比を達成する関数を選べば良いことになる． この解法は確率的解法であるが，本論文ではさらに，Mahajan と Ramesh による脱ランダム化手法が適用できる事を示して，決定的（非確率的）解法をも与えている．

第 5 章では，近似比率を計算するための数値計算手法を述べている． 加えて，より良い近似比率を実現する分布を探索するための指針についても議論している．

第 6 章は「まとめ」であり，本研究によって得られた知見と，今後の研究の展開の可能性について述べている．

本研究は，組合せ最適化の分野における最先端の研究であり，世界中で数多くの研究者が凌ぎを削る中で，新たな手法を考案することによって，達成可能な近似比の下界値を更新したものである．数理的な考察に基づいて工学的に有効な手法を開発したものであり，数理工学の分野に大きく寄与する研究として，高く評価できる．

よって本論文は博士(工学)の学位請求論文として合格と認められる．